

## DETALJNI IZVEDBENI NASTAVNI PLAN KOLEGIJA

Opće informacije		
<b>Naziv kolegija</b>	Teorija brojeva	
<b>Studijski program</b>	Sveučilišni diplomski studij Diskretna matematika i primjene	
<b>Godina</b>	I.	
<b>Status kolegija</b>	Obvezatan	
<b>Web stranica kolegija</b>	<a href="https://moodle.srce.hr">https://moodle.srce.hr</a>	
<b>Mogućnost izvođenja nastave na engleskom jeziku</b>	Da, prema potrebi	
<b>Bodovna vrijednost i način izvođenja nastave</b>	<b>ECTS koeficijent opterećenja studenata</b>	6
	<b>Broj sati (P+V+S)</b>	30+30+0
<b>Nositelj kolegija</b>	<b>Ime i prezime</b>	Ana Jurasić
	<b>Ured</b>	O-304
	<b>Vrijeme za konzultacije</b>	Prema potrebi i dogovoru e-mailom
	<b>Telefon</b>	584-662
	<b>e-adresa</b>	<a href="mailto:ajurasic@math.uniri.hr">ajurasic@math.uniri.hr</a>
<b>Suradnici na kolegiju</b>	<b>Ime i prezime</b>	-
	<b>Ured</b>	
	<b>Vrijeme za konzultacije</b>	
	<b>Telefon</b>	
	<b>e-adresa</b>	

### 1. OPIS PREDMETA

#### 1.1. Ciljevi kolegija

Teorija brojeva je područje matematike koje je svojim jednostavno iskazanim, ali vrlo teškim problemima (od kojih su neki rješavani ili se rješavaju stoljećima), oduvijek bilo motivacija i pokretač čitave matematike. U rješavanju tih problema primjenjuju se najnovija saznanja iz algebre, matematičke analize i geometrije. Osnovni cilj kolegija jest upoznati studente s načinima razmišljanja i dokazivanja tvrdnji u teoriji brojeva, a posebno upoznati algebarske i analitičke metode u teoriji brojeva. U tu je svrhu u okviru kolegija potrebno:

- Analizirati osnovna svojstva cijelih brojeva: djeljivost, prosti brojevi, rastav broja na proste faktore, Euklidov algoritam, kongruencije.
- Opisati rješenja kvadratne kongruencije koristeći Legendreov simbol te usporediti takve kongruencije kroz kvadratni zakon reciprociteta.
- Analizirati kvadratne forme i prikazivost cijelih brojeva kvadratnim formama te analizirati prikazivost cijelih brojeva kao sume određenog broja potpunih kvadrata.
- Definirati aritmetičke funkcije i usporediti njihove osnovne primjere.
- Razlikovati osnovne tipove diofantskih jednadžbi i opisati načine njihova rješavanja.
- Definirati eliptičke krivulje, analizirati njihova svojstva i primjene u teoriji brojeva.
- Primijeniti teoriju brojeva u kriptografiji javnog ključa.
- Ukratko opisati algebarske metode teorije brojeva te njihovu primjenu,

- Ukratko opisati analitičke metode teorije brojeva te njihovu primjenu.

## 1.2. Korelativnost i korespondentnost kolegija

Nema uvjeta za upis predmeta. Predmet je u korelaciji s kolegijima Elementarna matematika 2 i Teorija kodiranja i kriptografija.

## 1.3. Očekivani ishodi učenja za kolegij

Očekuje se da će nakon odslušanog kolegija i položenog ispita student moći:

11. analizirati osnovna svojstva cijelih brojeva te ih argumentirano primijeniti na jednostavne probleme u teoriji brojeva vezane uz djeljivost i algoritme djeljivosti (A6, B7, D6, E6, F6),
12. računati koristeći modularnu aritmetiku, rješavati kongruencijske jednadžbe te sustave kongruencija (A7, B7, D6, E6, F6),
13. argumentirano primijeniti kvadratni zakon reciprociteta i formule za računanje Legendreovog simbola na rješavanje kvadratnih kongruencija (A6, B7, D6, E6, F6),
14. opisati prikazivost cijelih brojeva kvadratnim formama u jednostavnijim slučajevima te argumentirano usporediti i klasificirati različite kvadratne forme (A6, B7, D6, E6, F6),
15. prikazati i analizirati osnovne multiplikativne funkcije i njihova svojstva te argumentirano provjeriti i prezentirati veze među njima (A6, B6, D6, E6, F6),
16. definirati osnovne tipove diofantskih jednadžbi i argumentirano opisati načine njihova rješavanja (A6, B7, D6, E6, F6),
17. definirati eliptičke krivulje, analizirati njihova osnovna svojstva te opisati važne otvorene probleme (A6, B6, D6, E6, F6),
18. argumentirano primijeniti metode teorije brojeva u analizi kriptosustava s javnim ključem (A7, B7, D6, E6, F6),
19. opisati i analizirati algebarske i analitičke metode u teoriji brojeva te ih argumentirano primijeniti na važne probleme teorije brojeva (A6, B6, D6, E6, F6).

## 1.4. Okvirni sadržaj kolegija

**Djeljivost.** Najveći zajednički djelitelj. Euklidov algoritam. Prosti brojevi.

**Kongruencije.** Eulerov teorem. Kineski teorem o ostacima. Primitivni korijeni i indeksi.

**Kvadratni ostaci.** Legendreov simbol. Kvadratni zakon reciprociteta. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.

**Kvadratne forme.** Redukcija binarnih kvadratnih formi. Sume dva i četiri kvadrata.

**Aritmetičke funkcije.** Eulerova i Möbiusova funkcija. Distribucija prostih brojeva.

**Diofantske jednadžbe.** Linearne diofantske jednadžbe. Pitagorine trojke. Pellova jednadžba.

**Eliptičke krivulje.**

**Kriptografija.** Primjena teorije brojeva u kriptografiji javnog ključa.

## 1.5. Vrste izvođenja nastave

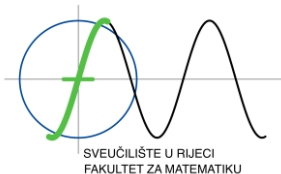
- predavanja  
 seminari i radionice  
 vježbe  
 e-učenje  
 terenska nastava  
 praktična nastava  
 praktikumska nastava

- samostalni zadaci  
 multimedija i mreža  
 laboratorijski rad  
 projektna nastava  
 mentorski rad  
 konzultativna nastava  
 ostalo \_\_\_\_\_

## 1.6. Komentari

Na vježbama će se rješavati zadaci, 50% u auditornom obliku, a 50% u računalnoj učionici, uz korištenje raspoložive programske podrške.

## 1.7. Oblici praćenja studenata i način vrednovanja rada studenata tijekom nastave



## KOLOKVIJI

- Tijekom semestra bit će zadana dva pismena kolokvija sa zadacima iz teorije brojeva.
- Svaki kolokvij traje 90 minuta i održava se u unaprijed dogovorenom terminu.
- Ukupan **maksimalni broj bodova iz kolokvija je 40** (20+20).

## DOMAĆE ZADAĆE

- Tijekom semestra zadaju se svakom studentu domaće zadaće sa zadacima iz teorije brojeva za samostalno rješavanje.
- Domaće zadaće se objavljuju i na web stranicama kolegija.
- Rješavanje zadataka iz domaćih zadaća provjerava se na vježbama dva puta u toku semestra. Detaljnije upute bit će dane na nastavi i u okviru online kolegija.
- Ukupan **maksimalan broj bodova iz domaćih zadaća je 10** (5+5).

## PROGRAMSKI ZADACI

- Jednom u semestru zadaju se programski zadaci koje studenti rješavaju ukoliko žele.
- Programski zadaci objavljuju se i na web stranicama kolegija.
- Boduju se s **maksimalno 10 bodova**.
- Studenti rješavaju zadane programske zadatke u dogovorenom programskom jeziku i, ukoliko predaju rad u dogovorenom vremenu, u mogućnosti su ostvariti bodove.

## TESTOVI NA PREDAVANJIMA

- Tijekom semestra na predavanjima će biti dana dva kratka testa znanja u svrhu provjere praćenja i razumijevanja gradiva obrađenog na predavanjima. Detaljnije upute bit će dane na nastavi i u okviru online kolegija.
- Testovi će se sastojati od kraćih teorijskih pitanja i pitanja vezanih uz jednostavniju primjenu.
- Testovima znanja moguće je ostvariti **maksimalno 10 bodova** (5+5).

U zadnjem tjednu nastave bit će organizirane **popravne aktivnosti** na kojima će studenti moći pisati jedan propušteni/lošije bodovani kolokvij i/ili provjeru domaće zadaće. Na taj način stečeni bodovi zamjenjuju prethodno stečene bodove iz iste komponente, bez obzira na ishod. S detaljima vezanim uz popravne aktivnosti studenti će biti upoznati na nastavi te kroz obavijesti na web stranicama kolegija.

### 1.8. Konstruktivno povezivanje

ISHODI UČENJA	SADRŽAJ	NASTAVNE AKTIVNOSTI	METODE VREDNOVANJA
I1	Djeljivost. Kongruencije. Kvadratni ostatci.	Kroz predavanja, audiorne vježbe, vježbe na računalima i samostalni rad, primjenjivat će se sljedeće metode učenja i poučavanja: metoda usmenog izlaganja, metoda demonstracija, metoda razgovora, metoda čitanja i rada na tekstu.	pisane provjere znanja, provjere znanja na računalu, usmena provjera znanja
I2	Kongruencije. Kvadratni ostatci. Kriptografija.		
I3	Kvadratni ostatci		
I4	Kvadratne forme		
I5	Aritmetičke funkcije		
I6	Diofantske jednadžbe		
I7	Eliptičke krivulje		
I8	Kriptografija		
I9	Cjelokupni sadržaj kolegija		

## 2. SUSTAV OCJENJIVANJA

### 2.1. Ocjenjivanje i vrednovanje rada studenata tijekom nastave te način polaganja ispita

Rad studenta na predmetu će se vrednovati i ocjenjivati tijekom nastave i na završnom ispitu. **Ukupan broj bodova koje student može ostvariti tijekom nastave je 70** (ocjenjuju se opisane aktivnosti studenata). Kroz sve oblike kontinuiranog praćenja i vrednovanja studenata tijekom nastave treba ukupno skupiti barem 50% mogućih ocjenskih bodova da bi se moglo pristupiti ispitu. Također, student mora ispuniti minimalne uvjete za pristup ispitu. Na ispitu je moguće ostvariti **maksimalno 30 bodova**. Prag prolaznosti na završnom ispitu je 50% uspješno riješenog ispita. Ispit se polaže kao pisana ili usmena provjera znanja.

Studenti koji tijekom nastave ostvare od 0% do 49,9% ocjenskih bodova koje je bilo moguće steći kroz oblike kontinuiranog praćenja i vrednovanja studenata ocjenjuju se ocjenom F (neuspješan), ne mogu steći ECTS bodove i moraju ponovno upisati predmet. Isto vrijedi i za studente koji u tri ponuđena ispitna roka ne polaže završni ispit.

### 2.2. Minimalni uvjeti za pristup ispitu/prolaznu ocjenu

AKTIVNOST KOJA SE BODUJE	MINIMALNI BROJ BODOVA
Kolokviji	20
<b>UKUPNO:</b>	<b>35</b> (tijekom nastave potrebno je skupiti 50% od mogućeg broja bodova te ostvariti minimalni uvjet na broj bodova iz kolokvija)
<b>OSTALI UVJETI:</b>	

### 2.3. Formiranje konačne ocjene

Na temelju ukupnog zbroja ocjenskih bodova stečenih tijekom nastave i na završnom ispitu određuje se konačna ocjena prema sljedećoj raspodjeli:

OCJENA	BODOVI
5 (A)	od 90 do 100 ocjenskih bodova
4 (B)	od 75 do 89,9 ocjenskih bodova
3 (C)	od 60 do 74,9 ocjenskih bodova
2 (D)	od 50 do 59,9 ocjenskih bodova
1 (F)	od 0 do 49,9 ocjenskih bodova

## 3. LITERATURA

### 3.1. Obvezna literatura

1. Dujella: *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
2. Baker: *A Concise Introduction to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
3. Dujella A., Maretić M.: *Kriptografija*, Element, Zagreb, 2007.

### 3.2. Dodatna literatura

1. I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, New York, 1991.
2. K. H. Rosen: *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley, Reading, 1993.
3. K. Chandrasekharan: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
4. H. E. Rose: *A Course in Number Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
5. W. M. Schmidt: *Diophantine Approximation*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
6. B. Pavković, D. Veljan: *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

#### 4. DODATNE INFORMACIJE O KOLEGIJU

##### 4.1. Pohađanje nastave

Studenti su dužni informirati se o nastavi s koje su izostali. Ne tolerira se nikakav oblik remećenja nastave te korištenje mobitela za vrijeme nastave.

##### 4.2. Način informiranja studenata

Svi relevantni podaci i obavijesti o predmetu bit će objavljeni u okviru online kolegija. Osobna odgovornost studenta je biti redovito informiran.

##### 4.3. Ostale relevantne informacije

Od studenata se očekuje visok stupanj samostalnosti i odgovornosti u radu. Tijekom rada na predmetu, poticat će se aktivni pristup učenju.

Prilikom izrade zadataka predviđenih planom i programom predmeta studenti se ne smiju služiti tuđim tekstom kao svojim. Svako neovlašteno preuzimanje tuđega teksta bez navođenja izvora smatra se intelektualnom krađom i podložno je sankcijama predviđenim važećim aktima. Uratke koje studenti budu slali putem sutava Merlin trebaju pripremiti prema uputi koju će dobiti na nastavi.

##### 4.4. Način praćenja kvalitete i uspješnosti izvedbe kolegija

Kvaliteta održane nastave prati se u skladu s aktima Fakulteta za matematiku i Sveučilišta u Rijeci. Krajem semestra provodit će se anonimna anketa u kojoj će studenti evaluirati kvalitetu održane nastave iz ovog kolegija. Nakon završetka semestra provest će se analiza uspješnosti studenata iz ovog kolegija.

##### 4.5. Ispitni rokovi

<b>Zimski</b>	7.2.2024. u 9:00 28.2.2024. u 9:00
<b>Izvanredni</b>	13.3.2024. u 14:00
<b>Jesenski</b>	

#### 5. SATNICA IZVOĐENJA NASTAVE U AKADEMSKOJ GODINI 2023/2024.

DATUM	VRIJEME	OBLIK NASTAVE	NAZIV TEME	GRUPA	PROSTORIJA
3.10.2023.	16:15-17:45	P	Djeljivost. Najveći zajednički djelitelj. Euklidov algoritam. Prosti brojevi. Jednoznačna faktorizacija.	Svi	O-S31
4.10.2023.	8:15-9:45	V	Djeljivost. Najveći zajednički djelitelj. Najmanja zajednička mjera. Euklidov algoritam i prošireni Euklidov algoritam, primjena. Prosti brojevi.	Svi	O-360
10.10.2023.	16:15-17:45	P	Kongruencije. Kineski teorem o ostacima. Eulerov teorem. Wilsonov teorem. Primitivni korijeni i indeksi.	Svi	O-S31
11.10.2023.	8:15-9:45	V	Kongruencije i primjene. Mali Fermatov teorem. Eulerov teorem. Wilsonov teorem. Kineski teorem o ostacima.	Svi	O-360
17.10.2023.	16:15-17:45	P	Kvadratni ostaci. Legendreov simbol. Kvadratni zakon reciprociteta.	Svi	O-S31
18.10.2023.	8:15-9:45	V	Kvadratni ostaci. Legendreov simbol i primjene. Jacobijev simbol i primjene. Kvadratni zakon reciprociteta.	Svi	O-360
24.10.2023.	16:15-17:45	P	Jacobijev simbol. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.	Svi	O-S31
25.10.2023.	8:15-9:45	V	Jacobijev simbol. Svojstva djeljivosti Fibonaccijevih brojeva.	Svi	O-360
31.10.2023.	16:15-17:45	P	Kvadratne forme. Redukcija binarnih kvadratnih formi.	Svi	O-S31



7.11.2023.	16:15-17:45	V	Kvadratne forme. Redukcija binarnih kvadratnih formi. Ekvivalentne kvadratne forme.	Svi	O-S31
8.11.2023.	8:15-9:45	P	Sume dva kvadrata. Sume četiri kvadrata.	Svi	O-360
14.11.2023.	16:15-17:45	V	Sume dva kvadrata. Sume četiri kvadrata.	Svi	O-S31
15.11.2023.	8:15-9:45	V	<b>Prvi kolokvij</b>	Svi	O-360
21.11.2023.	16:15-17:45	P	Aritmetičke funkcije.	Svi	O-S31
22.11.2023.	8:15-9:45	P	Distribucija prostih brojeva.	Svi	O-360
28.11.2023.	16:15-17:45	V	Aritmetičke funkcije i primjena.	Svi	O-363
29.11.2023.	8:15-9:45	P	Linearne diofantske jednačbe. Pitagorine trojke.	Svi	O-360
5.12.2023.	16:15-17:45	V	Linearne diofantske jednačbe. Pitagorine trojke.	Svi	O-363
6.12.2023.	8:15-9:45	P	Pellove i pellovske jednačbe.	Svi	O-360
12.12.2023.	16:15-17:45	V	Pellove i pellovske jednačbe.	Svi	O-363
13.12.2023.	8:15-9:45	P	Eliptičke krivulje i primjena.	Svi	O-360
19.12.2023.	16:15-17:45	V	Eliptičke krivulje i primjena.	Svi	O-363
20.12.2023.	8:15-9:45	P	Testovi prostosti i metode faktorizacije.	Svi	O-360
9.1.2024.	16:15-17:45	V	Testovi prostosti i metode faktorizacije.	Svi	O-363
10.1.2024.	8:15-9:45	P	Ideja kriptosustava s javnim ključem. RSA kriptosustav.	Svi	O-360
16.1.2024.	16:15-17:45	V	Ideja kriptosustava s javnim ključem. RSA kriptosustav.	Svi	O-363
17.1.2024.	8:15-9:45	P	Ostali kriptoustavi s javnim ključem.	Svi	O-360
23.1.2024.	16:15-13:45	V	<b>Drugi kolokvij</b>	Svi	O-363
24.1.2024.	8:15-9:45	V	Ostali kriptoustavi s javnim ključem.	Svi	O-363
30.1.2024.	9:00-11:00		<b>Popravne aktivnosti</b>		O-364

*Moguća su manja odstupanja u realizaciji izvedbenog plana.*

*Do 40% planirane nastave može biti održano online.*

P – predavanja

AV – audiorne vježbe

VP – vježbe u praktikumu

MV – metodičke vježbe

S – seminari