

Zvonimir Šikić: Prikaz teksta „Logika i vjerojatnost“

Prikazujemo tekst buduće knjige "Logika i vjerojatnost" (403. str. plus reference).

Logika uključuje standardnu propozicijsku i predikatsku logiku, ali i Aristotelovu silogistiku i njeno Vennovo poopćenje (iz povijesnih razloga). Također je nestandardno uključena i bulovska logika (čiju odlučivost dokazujemo Herbrandovom metodom) te njoj ekvivalentna monadska logika.

Glavno sredstvo kojim analiziramo predikatsku (poliadsku) logiku su Bethova semantička stabla za koja trivijalno dokazujemo da su pozitivni test za implikaciju (što je zapravo dokaz potpunosti i kompaktnosti te logike i ekvivalentnosti njenih aksiomatskih, prirodnih i sekventnih formulacija). Trivijalno slijedi postojanje nestandardnih modela aritmetike 1. reda (dokazujemo i kategoričnost aritmetike 2. reda) kao i Skolemov „paradoks“ koji diskutiramo u svezi s redukcijom matematike na teoriju skupova. Nestandardno je i poglavlje posvećeno definicijama.

Obrađujemo i modalnu logiku (standardne sustave K, T, S4 i S5, deontičke sustave D i D⁺ te sustav aritmetičke dokazivosti GL) kako sintaktički tako i semantički (pomoću Kripkeovih okvira i modela). Bavimo se i modalnom kvantifikacijom. Kao nestandardni dodatak nudimo Gödelov ontološki dokaz i njegovu kritiku.

Gödel/Tarski/Rosser teoreme o nepotpunost obrađujemo (također nestandardno) na tri razine. Prva koja je svakom lako pratljiva odnosi se na (lingvističke) teorije koje govore o vlastitom jeziku. Druga se odnosi na aritmetičke teorije općenito i nešto je apstraktnija, ali jasno pokazuje zašto je aritmetika nepotpuna. Treća se odnosi na aritmetiku 1. reda i tehnički je najzahtjevnija zbog raznih (zapravo nebitnih) ograničenja aritmetike 1. reda.

Obrađujemo i teoriju izračunljivosti (preko Smullyanovih formalnih sustave i Smullyan-izbrojivosti) te u tom kontekstu dokazujemo pojačane verzije teorema o nepotpunosti.

Na kraju logičkog dijela dokazujemo teorem o nedokazivosti konzistentnosti i diskutiramo njegove popularne primjene na pitanje „je li čovjek stroj“. Dokazujemo da bismo, što se Gödelovih teorema tiče, mogli biti strojevi. Ali ako jesmo onda nismo sposobni za potpunu spoznaju tih strojeva, odnosno za potpunu spoznaju samih sebe.

Vjerojatnost počinjemo standardni prikazom klasične vjerojatnosti s mnogo nestandardnih primjera. (Bacio sam 5 kuna i 1 kunu. Ne vidite rezultat ali vas istinito informiram da je 5 kuna dalo glavu. Kolika je vjerojatnost da je 1 kuna dala glavu? Nije nužno $1/2!$) Tu se bavimo i problemom determinizma. (Bacanje kovanice je deterministički pokus, jer za zadani v i ω ishod možemo izračunati i eksperimentalno potvrditi. Zašto je onda bacanja kovanice slučajni pokus?)

Slijedi prikaz frekvencijskog pristupa vjerojatnosti (vjerojatnost = granična frekvencija) i mnogih problema koji potkopavaju taj pristup. Posebno se bavimo Bernoullijevim pogrešnim izvodom vjerojatnosti iz frekvencija (njegov tzv. zlatni teorem).

Prikazujemo i najstariji pristup vjerojatnosti kao plauzibilnosti s obzirom na raspoložive informacije. To je najopćenitiji i najprimjenljiviji pojam vjerojatnosti, koji su frekvencionisti odbacili „jer nije jasno zašto bi taj pojam zadovoljavao standardne aksiome vjerojatnosti“. No, Cox je dokazao da ih plauzibilnost zadovoljava i taj prigovor ne stoji već skoro sto godina.

Konačno se vraćamo logici pokazujući da je vjerojatnost proširena logika. Definiramo probabilističke modele kao proširenja logičkih (verističkih) modela i u odnosu na njih definiramo probabilističku implikaciju (npr. probabilistički *modus ponens* izgleda ovako: $Pr(A) = p \ \& \ Pr(B|A) = q \Rightarrow Pr(B) \in [pq, 1 - pq]$). To je zapravo bila Booleova logika.

Dokazujemo da u logičkom kontekstu zakon velikih brojeva zapravo ne zahtijeva neprebrojiv vjerojatnosni prostor (na kojem je relevantni skup nizova zanemariv).

Sljedeća dva poglavlja bave se pitanjem „što je slučajnost“. Na izgled različiti odgovori koji se pozivaju na nepredvidivost (Mises, Ville, Kolmogorov), tipičnost (Martin-Löf) i nekompresibilnost (Kolmogorov, Chaitin) daju ekvivalentne rezultate. To Martin-Löf Chaitinovu tezu da oni dobro definiraju slučajnost čini plauzibilnom.

U kontekstu nekompresibilnosti dokazujemo i Gödel-Chaitinov teorem o nepotpunosti (postoji m takav da se ni za jedan konačni niz s ne može formalno dokazati da on ima složenost veću od m).

Zadnje poglavlje bavi se odnosom vjerojatnosti, (znanstvene) indukcije i kauzalnosti. Pokazuje se da nema probabilističke metode koja uzroke može odrediti iz podataka. Zato podatke moramo tumačiti i na temelju neformalnih uzročno-posljedičnih

pretpostavki (treba li ili ne treba kontrolirati neku varijablu ne možemo riješiti bez kauzalnih pretpostavki). No, postoje i formalne metode koje to rješavaju algoritamski i koje su u zadnjih 30-tak godina, dovele do prave „*kauzalne revolucije*“. Prikazujemo njihovu osnovnu ideju.