

# ARITMETIZACIJA MATEMATIKE

Zvonimir Šikić

Apstrakt:

*Danas su u analizi preostali samo prirodni brojevi ili sustavi prirodnih brojeva... Matematika je aritmetizirana.*

(Poincaré, 1900.)

U potrazi za sigurnim temeljem matematike, matematičari su se okrenuli prirodnim brojevima. Iz njih i njihovih skupova izgradili su realne i kompleksne brojeve, funkcije i geometrijske objekte. Pitanja o njima preveli su u pitanja o  $\mathbb{N}$  i  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ . To je projekt aritmetizacije koji je Kronecker odbacio kao „mistiku“.

Hilbert je predložio program aksiomatskog opravdanja te „mistike“ tako da se analiza razvije u okviru aksiomatskog sustava realnih brojeva te da se konzistentnost tog sustava dokaže konstruktivnim metodama koje bi Kronecker prihvatio (to je bio Hilbertov drugi problem).

Gödel je 1931. dokazao da je tako formulirano pitanje konzistentnosti formalnog aksiomatskog sustava analize ekvivalentno odgovarajućem pitanju u formalnom aksiomatskom sustavu aritmetike, npr. PA, ali je također dokazao da se na to pitanje u PA ne može odgovoriti (ni konzistentnost samog sustava PA nije dokaziva u PA).

Zato nije pretjerano reći da su moderna logika i izračunljivost proizašle iz zabrinutosti matematičara 19. stoljeća za temelje matematike.

Drugi su matematičari, paralelno, slijedili Kroneckera u izgradnji analize konstruktivnim metodama. Jedan od slavnijih bio je Herman Weyl koji je 1918. izgradio analizu u sustavu s aksiomom aritmetičke komprehenzije. Danas bismo rekli u sustavu  $ACA_0$ . Taj je sustav dovoljno jak da dokaže sve

temeljne teoreme analize. On je i PA konzervativan pa ga to kvalificira kao istinsku aritemizaciju i konstruktivizaciju analize.

No nije da aritmetička komprehenzija samo dokazuje ove teoreme. Ona je zapravo ekvivalentno nekima od njih i te se ekvivalencije mogu dokazati u  $RCA_0$  (sustavu izračunljive analize). Time se bavi *reverse mathematics* u kojoj su se iskristalizirali sustavi  $RCA_0$ ,  $WKL_0$ ,  $ACA_0$ ,  $ATR_0$  i  $\Pi_1^1CA_0$ . Oni su poznati kao "velika petorka" i generiraju gotovo sve teoreme standardne matematike.