Konstrukcija blok dizajna pod djelovanjem abelove grupe automorfizama

Doris Dumičić
ddumicic@math.uniri.hr

- **D. Crnković, S. Rukavina**: Construction of block designs admitting an abelian automorphism group, Metrika (2005) 62: 175-183

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Incidencijske strukture

Incidencijska struktura

Incidencijska struktura $\mathcal{D}$ je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{B}$ neprazni disjunktni skupovi i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$.
Elemente skupa $\mathcal{P}$ nazivamo točke, elemente skupa $\mathcal{B}$ blokovi, a relacija $\mathcal{I}$ naziva se relacija incidencije.

Incidencijske strukture

Incidencijska struktura

Incidencijska struktura $\mathcal{D}$ je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{B}$ neprazni disjunktni skupovi i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$.
Elemente skupa $\mathcal{P}$ nazivamo točke, elemente skupa $\mathcal{B}$ blokovi, a relacija $\mathcal{I}$ naziva se relacija incidencije.

Dizajn

Konačna incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je $t-(v, k, \lambda)$ **dizajn** ako vrijedi:
1.$|\mathcal{P}| = v$
2.svaki element skupa $\mathcal{B}$ incidentan je s točno k elemenata skupa $\mathcal{P}$
3.svakih t elemenata skupa $\mathcal{P}$ incidentno je s točno λ elemenata skupa $\mathcal{B}$.

Stupanj točke i bloka

Stupanj točke $P \in \mathcal{P}$ je kardinalan broj skupa svih blokova incidentnih s točkom P, tj. $|\langle P \rangle| = \{x \in \mathcal{B} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.
Stupanj bloka $x \in \mathcal{B}$ je kardinalan broj skupa svih točaka incidentnih s blokom x, tj. $|\langle x \rangle| = \{P \in \mathcal{P} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.

Stupanj točke i bloka

Stupanj točke $P \in \mathcal{P}$ je kardinalan broj skupa svih blokova incidentnih s točkom P, tj. $|\langle P\rangle| = \{x \in \mathcal{B} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.
Stupanj bloka $x \in \mathcal{B}$ je kardinalan broj skupa svih točaka incidentnih s blokom x, tj. $|\langle x\rangle| = \{P \in \mathcal{P} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.

Za incidencijsku strukturu $\mathcal{D}$ u kojoj je svaka od v točaka stupnja r i svaki od b blokova stupnja k vrijedi $vr = bk$.

Stupanj točke i bloka

Stupanj točke $P \in \mathcal{P}$ je kardinalan broj skupa svih blokova incidentnih s točkom P, tj. $|\langle P \rangle| = \{x \in \mathcal{B} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.
Stupanj bloka $x \in \mathcal{B}$ je kardinalan broj skupa svih točaka incidentnih s blokom x, tj. $|\langle x \rangle| = \{P \in \mathcal{P} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.

Za incidencijsku strukturu $\mathcal{D}$ u kojoj je svaka od v točaka stupnja r i svaki od b blokova stupnja k vrijedi $vr = bk$.

Blok dizajn

$2 - (v, k, \lambda)$ dizajn naziva se **blok dizajn** ili **balansiran nepotpun blok dizajn**, u oznaci (v, k, λ)-BIBD.

Stupanj točke i bloka

Stupanj točke $P \in \mathcal{P}$ je kardinalan broj skupa svih blokova incidentnih s točkom P, tj. $|\langle P\rangle| = \{x \in \mathcal{B} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.
Stupanj bloka $x \in \mathcal{B}$ je kardinalan broj skupa svih točaka incidentnih s blokom x, tj. $|\langle x\rangle| = \{P \in \mathcal{P} | (P, x) \in \mathcal{I}\}$.

Za incidencijsku strukturu $\mathcal{D}$ u kojoj je svaka od v točaka stupnja r i svaki od b blokova stupnja k vrijedi $vr = bk$.

Blok dizajn

$2-(v, k, \lambda)$ dizajn naziva se **blok dizajn** ili **balansiran nepotpun blok dizajn**, u oznaci (v, k, λ)-BIBD.

U blok dizajnu svaka točka je incidentna s točno $r^1 = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ blokova.

Izomorfizam incidencijskih struktura

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ incidencijske strukture. Bijektivno preslikavanje $f : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{B}_1 \to \mathcal{P}_2 \times \mathcal{B}_2$ je **izomorfizam** iz $\mathcal{D}_1$ u $\mathcal{D}_2$ ako vrijedi:

1. f preslikava $\mathcal{P}_1$ u $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{B}_1$ u $\mathcal{B}_2$
2. $(P, x) \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow (f(P), f(x)) \in \mathcal{I}_2, \forall P \in \mathcal{P}_1$ i $\forall x \in \mathcal{B}_1$.

Izomorfizam incidencijskih struktura

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ incidencijske strukture. Bijektivno preslikavanje $f : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{B}_1 \to \mathcal{P}_2 \times \mathcal{B}_2$ je **izomorfizam** iz $\mathcal{D}_1$ u $\mathcal{D}_2$ ako vrijedi:

1. f preslikava $\mathcal{P}_1$ u $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{B}_1$ u $\mathcal{B}_2$
2. $(P, x) \in \mathcal{I}_1 \Rightarrow (f(P), f(x)) \in \mathcal{I}_2, \forall P \in \mathcal{P}_1$ i $\forall x \in \mathcal{B}_1$.

Za $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ definirani izomorfizam dizajna na samoga sebe naziva se automorfizam dizajna. Skup svih automorfizama dizajna $\mathcal{D}$, u oznaci $\mathrm{Aut}(\mathcal{D})$ je grupa i naziva se puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$.

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa i skup $\Omega \neq \emptyset$. Djelovanje grupe G na skup Ω je preslikavanje $\varphi : \Omega \times G \to \Omega$ za koje vrijedi:
1. $\varphi(x, 1) = x, \forall x \in \Omega, 1 \in G$
2. $\varphi(x, gh) = \varphi(\varphi(x, g), h), \forall g, h \in G$ i $\forall x \in \Omega$.

Skup Ω na kojem je definirano djelovanje grupe G naziva se **G-skup**.

Djelovanje grupe na skup

Neka je G grupa i skup $\Omega \neq \emptyset$. Djelovanje grupe G na skup Ω je preslikavanje $\varphi : \Omega \times G \to \Omega$ za koje vrijedi:
1. $\varphi(x, 1) = x, \forall x \in \Omega, 1 \in G$
2. $\varphi(x, gh) = \varphi(\varphi(x, g), h), \forall g, h \in G$ i $\forall x \in \Omega$.

Skup Ω na kojem je definirano djelovanje grupe G naziva se **G-skup**.

Stablizator

Za grupu $G \leq S(\Omega)$ i $x \in \Omega \neq \emptyset$ skup $G_x = \{g \in G | xg = x\}$ naziva se **stabilizator** elementa x za djelovanje grupe G na Ω.

G-orbita

G-orbita elementa $x \in \Omega$ je klasa ekvivalencije tog elementa s obzirom na relaciju ekvivalencije (G-povezanost): $xG = \{xg | g \in G\}$. Element x naziva se reprezentativan element orbite xG.

G-orbita

G-orbita elementa $x \in \Omega$ je klasa ekvivalencije tog elementa s obzirom na relaciju ekvivalencije (G-povezanost): $xG = \{xg | g \in G\}$. Element x naziva se reprezentativan element orbite xG.

Ako konačna grupa G djeluje na skup Ω, tada $\forall x \in \Omega$ vrijedi $|xG| = \frac{|G|}{|G_x|} = [G : G_x]$.

G-orbita

G-orbita elementa $x \in \Omega$ je klasa ekvivalencije tog elementa s obzirom na relaciju ekvivalencije (G-povezanost): $xG = \{xg | g \in G\}$. Element x naziva se reprezentativan element orbite xG.

Ako konačna grupa G djeluje na skup Ω, tada $\forall x \in \Omega$ vrijedi $|xG| = \frac{|G|}{|G_x|} = [G : G_x]$.

Propozicija

Neka grupa G djeluje na skup Ω i neka je G_x stabilizator elementa $x \in \Omega$ za djelovanje grupe G. Za $y \in xG$, $\exists g \in G$ za koji $y = xg$ i $G_y = g^{-1} G_x g$.

Orbitne matrice

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ $2-(v,k,\lambda)$ dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$.
G- orbite točaka označimo s $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ i G-orbite blokova s $\mathcal{B}_1, \dots \mathcal{B}_m$ i označimo $|\mathcal{P}_r| = \omega_r$, $|\mathcal{B}_i| = \Omega_i$, $1 \leq r \leq n$, $1 \leq i \leq m$.
Točke orbite $\mathcal{P}_r$ označimo s $r_0, \dots, r_{\omega_{r-1}}$. Očito vrijede sljedeće jednakosti:

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r = v, \sum_{i=1}^{m} \Omega_i = b, \text{gdje} \quad \text{je} \quad b = |\mathcal{B}|$$

.

Neka su zadani $x \in \mathcal{B}_i$ i $P \in \mathcal{P}_r$ i $g \in G$. Tada vrijedi $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = |\langle xg \rangle \cap \mathcal{P}_r|$.
Stoga, kardinalni broj $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = \gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru bloka $x \in \mathcal{B}_i$.
Isto tako $|\langle P \rangle \cap \mathcal{B}_i| = \Gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru predstavnika $P \in \mathcal{P}_r$.

Neka su zadani $x \in \mathcal{B}_i$ i $P \in \mathcal{P}_r$ i $g \in G$. Tada vrijedi $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = |\langle xg \rangle \cap \mathcal{P}_r|$.
Stoga, kardinalni broj $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = \gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru bloka $x \in \mathcal{B}_i$.
Isto tako $|\langle P \rangle \cap \mathcal{B}_i| = \Gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru predstavnika $P \in \mathcal{P}_r$.

Lema 1

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ blok dizajn, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ i ranije definirani Ω_i, ω_r, γ_{ir} i Γ_{ir}. Vrijede sljedeće jednakosti:
a) $\Omega_i \gamma_{ir} = \omega_r \Gamma_{ir}$;
b) $\sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ir} \gamma_{is} = \lambda \omega_s + \delta_{rs}(r^1 - \lambda)$; gdje je δ_{rs} Kronecker-ov simbol.

Propozicija 1

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ blok dizajn, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ i Ω_i, ω_r i γ_{ir} definirani kao ranije. Vrijede sljedeće jednakosti:

1) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \gamma_{ir} = k$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\Omega_i}{\omega_r} \gamma_{ir}\gamma_{is} = \lambda\omega_s + \delta_{rs}(r^1 - \lambda).$

Očito vrijedi $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ir} = r^1$.

Definicija 1

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija 1

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija 2

Indeksni skup za element (i,r) orbitne matrice je skup indeksa točaka orbite $\mathcal{P}_r$ koji označavaju koja je točka te orbite incidentna s predstavnikom orbite blokova $\mathcal{B}_i$.

Definicija 1

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija 2

Indeksni skup za element (i,r) orbitne matrice je skup indeksa točaka orbite $\mathcal{P}_r$ koji označavaju koja je točka te orbite incidentna s predstavnikom orbite blokova $\mathcal{B}_i$.

Konstrukcija blok dizajna pod djelovanjem pretpostavljene grupe automorfizama sastoji se od dva osnovna koraka:

1. Konstrukcije orbitnih matrica za danu grupu automorfizama,
2. Konstrukcije blok dizajna za dobivene orbitne matrice. Ovaj se korak često naziva **indeksiranje orbitnih matrica**.

Konstrukcija blok dizajna djelovanjem abelove grupe automorfizama

Teorem 1

Svaka konačna abelova grupa je direktni produkt cikličkih grupa.

Konstrukcija blok dizajna djelovanjem abelove grupe automorfizama

Teorem 1

Svaka konačna abelova grupa je direktni produkt cikličkih grupa.

Neka je G abelova grupa koja je direktni produkt $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_s$, gdje su $C_1, \ldots, C_s$ cikličke grupe.

Koristit ćemo glavne nizove grupe G:
$1 \triangleleft C_1 \triangleleft C_1 \times C_2 \triangleleft \ldots \triangleleft C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{s-1} \triangleleft G.$

Konstrukcija blok dizajna djelovanjem abelove grupe automorfizama

Teorem 1

Svaka konačna abelova grupa je direktni produkt cikličkih grupa.

Neka je G abelova grupa koja je direktni produkt $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_s$, gdje su $C_1, \ldots, C_s$ cikličke grupe.

Koristit ćemo glavne nizove grupe G:
$1 \triangleleft C_1 \triangleleft C_1 \times C_2 \triangleleft \ldots \triangleleft C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{s-1} \triangleleft G$.

Teorem 2

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ konačan skup, $G \leq S(\Omega)$ i $H \triangleleft G$. Zatim, neka su x, y elementi iste G-orbite. Tada $|xH| = |yH|$.

Postupak konstrukcije blok dizajna pod djelovanjem abelove grupe automorfizama $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_s$ sastoji se od $s+1$ koraka:

Korak 1: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje grupe G
Korak 2: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje normalne podgrupe $C_1 \times \; C_2 \times \ldots \times C_{s-1}$

$\vdots$

Korak s: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje normalne podgrupe C_1
Korak (s+1): Indeksiranje orbitnih matrica za C_1 uzimajući u obzir djelovanje grupa $C_2, C_3, \ldots, C_{s-1}$ i C_s na dizajne.

Primjena grupa $C_2, C_3, \ldots, C_{s-1}$ i C_s u koraku (s+1) ubrzava proces indeksiranja.

Konstrukcija simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna djelovanjem grupe automorfizama reda 55

- **D. Crnković, S. Rukavina**: Unique symmetric $(66, 26, 10)$ design admitting an automorphism of order 55

Simetričan dizajn

$t-(v,k,\lambda)$ dizajn naziva se **simetričan** dizajn ako vrijedi $|\mathcal{P}|=|\mathcal{B}|$.

Stupanj svake točke jednak je stupnju svakog bloka simetričnog dizajna, tj. $r=k$.

Simetričan dizajn

$t-(v,k,\lambda)$ dizajn naziva se **simetričan** dizajn ako vrijedi $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}|$.

Stupanj svake točke jednak je stupnju svakog bloka simetričnog dizajna, tj. $r = k$.

Za $t-(v,k,\lambda)$ dizajn $\Rightarrow t \leq 2$.

U simetričnom dizajnu dva su bloka incidentna s točno λ zajedničkih točaka.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Abelovu grupu automorfizama simetričnog dizajna reda 55 označit ćemo kao cikličku grupu $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Abelovu grupu automorfizama simetričnog dizajna reda 55 označit ćemo kao cikličku grupu $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$.

Neka je ρ automorfizam simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna. Ako je $|\rho| = 11$, tada je broj fiksnih točaka za ρ, u oznaci $F(\rho) = 0$.

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Abelovu grupu automorfizama simetričnog dizajna reda 55 označit ćemo kao cikličku grupu $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$.

Neka je ρ automorfizam simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna. Ako je $|\rho| = 11$, tada je broj fiksnih točaka za ρ, u oznaci $F(\rho) = 0$.

Dokaz

Poznato je da vrijedi nejednakost $F(\rho) < k + \sqrt{k - \lambda}$ i $F(\rho) \equiv v(mod\,|p|)$. Dakle, $F(\rho) \in \{0, 11, 22\}$. Za $F(\rho) \in \{11, 22\}$ nije moguće konstruirati fiksne blokove $\Rightarrow F(\rho) = 0$.

Grupa Z_{55} djeluje na dizajn $\mathcal{D}$ s distribucijom orbita $(11, 55)$.

Grupa Z_{55} djeluje na dizajn $\mathcal{D}$ s distribucijom orbita $(11, 55)$.

Dokaz

Grupa Z_{11} djeluje na $\mathcal{D}$ s distribucijom orbita $(11, 11, 11, 11, 11, 11)$
$Z_{11} \triangleleft Z_{11} \times Z_5 \Rightarrow Z_5$ preslikava Z_{11} orbite u Z_{11} orbite.
Dakle, jedine mogućnosti orbitnih distribucija za grupu Z_{55} su $(11, 11, 11, 11, 11, 11)$ i $(11, 55)$. U slučaju da je za djelovanje grupe Z_{55} orbitna distribucija $(11, 11, 11, 11, 11, 11)$, automorfizam dizajna iz grupe Z_5 će djelovati na dizajn $\mathcal{D}$ s 66 fiksnih točaka, što je nemoguće jer automorfizam simetričnog dizajna može imati maksimalno 29 fiksnih točaka. Stoga je orbitna distribucija za grupu Z_{55} $(11, 55)$.

Korak 1: Za simetričan $(66, 26, 10)$ dizajn i grupu automorfizama $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$ postoji samo jedna orbitna matrica, prikazana u Tablici 1.

Tablica 1 - OM orbitna matrica

OM	11	55
11	1	25
55	5	21

Korak 1: Za simetričan $(66, 26, 10)$ dizajn i grupu automorfizama $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$ postoji samo jedna orbitna matrica, prikazana u Tablici 1.

Tablica 1 - OM orbitna matrica

OM	11	55
11	1	25
55	5	21

Teško je nastaviti s indeksiranjem orbitne matrice OM jer imamo $\binom{55}{25}$ mogućnosti za određivanje indeksnih skupova za poziciju $(1, 2)$ u OM.

Korak 2: Do na izomorfizam, jedina orbitna matrica za cikličku grupu Z_{11} je orbitna matrica OM1 iz Tablice 2.

Tablica 2 - OM1 orbitna matrica

OM1	11	11	11	11	11	11
11	1	5	5	5	5	5
11	5	5	5	5	5	1
11	5	5	5	5	1	5
11	5	5	5	1	5	5
11	5	5	1	5	5	5
11	5	1	5	5	5	5

Korak 2: Do na izomorfizam, jedina orbitna matrica za cikličku grupu Z_{11} je orbitna matrica OM1 iz Tablice 2.

Tablica 2 - OM1 orbitna matrica

OM1	11	11	11	11	11	11
11	1	5	5	5	5	5
11	5	5	5	5	5	1
11	5	5	5	5	1	5
11	5	5	5	1	5	5
11	5	5	1	5	5	5
11	5	1	5	5	5	5

Permutacija reda 5 djeluje na skup od šest Z_{11}-orbita točaka kao permutacija $(1)(2,6,5,4,3)$ i na skup Z_{11}-orbita blokova kao permutacija $(1)(2,3,4,5,6)$.

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i=2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i=2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Stoga, grupe Z_{11} i Z_5 djeluju na skup točaka kako slijedi:
$Z_{11} - (I_0, I_1, \ldots, I_{10}),\ I = 1,2,\ldots,6$
$Z_5 - (1_i)(2_i, 6_i, 5_i, 4_i, 3_i),\ i = 0,1,\ldots,10.$

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i=2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Stoga, grupe Z_{11} i Z_5 djeluju na skup točaka kako slijedi:
$Z_{11} - (I_0, I_1, \ldots, I_{10}),\ I = 1,2,\ldots,6$
$Z_5 - (1_i)(2_i,6_i,5_i,4_i,3_i),\ i = 0,1,\ldots,10.$

Indeksni skupovi koji se mogu pojaviti u dizajnima su: $0 = \{0\},\ldots,10=\{10\},11=\{0,1,2,3,4\},\ldots,472=\{6,7,8,9,10\}$.

Indeksiranje OM1 generira, do na izomorfizam, samo jedan dizajn koji je prikazan pomoću indeksnih skupova u Tablici 3.

Tablica 3 - Simetričan $(66, 26, 10)$ dizajn

0	280	280	280	280	280
20	20	450	450	20	5
20	450	450	20	5	20
20	450	20	5	20	450
20	20	5	20	450	450
20	5	20	450	450	20