O primitivnim dizajnima

Vedrana Mikulić
(vmikulic@math.uniri.hr)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

12. veljače 2009.

Sadržaj

1. Uvod
2. Metoda konstrukcije
3. Rezultati
4. Zaključak

Motivacija

- D. Held, J. Hrabe de Angelis, M.-O. Pavčević, $PSp_4(3)$ as a symmetric (36,15,6)-design, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 101 (1999), 95-98.
- D. Crnković, S. Rukavina, On some symmetric (45,12,3) and (40,13,4) designs, J. Comput. Math. Optim Vol. 1, No. 1 (2005), 55-63.
- J. D. Key, J. Moori, Codes, Designs and Graphs from the Janko Groups J_1 and J_2, J. Combin. Math. Combin. Comput. 40 (2002), 143-159.
- J. D. Key, J. Moori, B. G. Rodrigues, On some designs and codes from primitive representations of some finite simple groups, J. Combin. Math. Combin. Comput. 45 (2003), 3–19.

Djelovanje grupe na skup

Grupa G **djeluje** na skup X ako postoji homomorfizam $F : G \to S(X),\ g \mapsto f_g,\ f_g(x) = g.x.$

Skup $G.x = \{g.x \mid g \in G\}$, naziva se **orbita** elementa x za djelovanje grupe G.

Skup $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\} \leq G$ naziva se **stabilizator** elementa x za djelovanje grupe G.

Grupa G djeluje **tranzitivno** na skup X ako postoji element $x \in X$ takav da je $G.x = X$.

Grupa G djeluje **primitivno** na skup X ako G djeluje tranzitivno na skup X i ako je G_x maksimalna podgrupa grupe G za svaki $x \in X$.

Djelovanje grupe G na skup svih svojih podgrupa P konjugacijom.

$$f_g : P \to P,\ f_g(H) = H^g$$

$$F : G \to S(P),\ g \mapsto f_g$$

Orbita (**klasa konjugiranosti**): $ccl_G H = \{H^g \mid g \in G\},\ H \leq G$
Stabilizator (**normalizator**): $N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = H\},\ H \leq G$
Vrijedi:

- $|ccl_G H| = [G : N_G(H)]$
- $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$

Dizajni

Struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je $t-(v,k,\lambda)$ **dizajn** ako vrijedi:

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa $\mathcal{B}$ incidentan je s točno k elemenata skupa $\mathcal{P}$,
3. svakih t elemenata skupa $\mathcal{P}$ incidentno je s točno λ elemenata skupa $\mathcal{B}$.

$2-(v,k,\lambda)$ dizajn naziva se **blok dizajn**.
$t-(v,k,\lambda)$ dizajn je **simetričan** ako vrijedi $v=b$, gdje je b broj blokova, te je tada $t \leq 2$.
Projektivna ravnina reda n je simetričan dizajn s parametrima $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$.

Puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$, $\mathrm{Aut}\mathcal{D}$, je grupa svih bijektivnih preslikavanja koja preslikavaju skup točaka na skup točaka i skup blokova na skup blokova te čuvaju incidenciju.

Grafovi

Neka je $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ graf sa n vrhova. Graf $\mathcal{G}$ je **jako regularan graf** s parametrima (n, k, λ, μ), uz oznaku $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, ako vrijedi:

1. $\mathcal{G}$ je jednostavan $k-$regularan graf,
2. svaka dva susjedna vrha imaju točno λ zajedničkih susjednih vrhova,
3. svaka dva nesusjedna vrha imaju točno μ zajedničkih susjednih vrhova.

Automorfizam grafa je bijekcija na skupu vrhova $\mathcal{V}$ koja čuva susjednost. Grupa svih automorfizama grafa $\mathcal{G}$, Aut$\mathcal{G}$, naziva se **puna grupa automorfizama grafa**.

Teorem (KM)

Neka je Ω *n−člani skup,* α *element skupa* Ω *i neka je* G *konačna grupa koja djeluje primitivno na skup* Ω*. Neka je* $\Delta \neq \{\alpha\}$*, orbita za djelovanje stabilizatora* G_α *na neki element* $\beta \in \Omega$*,* $\Delta = \{g.\beta \mid g \in G_\alpha\}$*. Tada je*

(1) $\mathcal{B} = \{g.\Delta \mid g \in G\}$ *n−člani skup blokova simetričnog samodualnog* $1-(n, |\Delta|, |\Delta|)$ *dizajna na kojega grupa* G *primitivno djeluje kao grupa automorfizama,*

(2) *za* $\delta \in \Delta$*, skup* $\mathcal{E} = \{g.\{\alpha, \delta\} \mid g \in G\}$ *je skup bridova povezanog* $|\Delta|$*−regularnog grafa sa n vrhova na kojega grupa* G *primitivno djeluje kao grupa automorfizama.*

D. Crnković, V. Mikulić, Unitals, projective planes and other combinatorial structures constructed from the unitary groups $U(3, q)$, $q = 3, 4, 5, 7$, Ars Combin., prihvaćen za objavljivanje

Teorem (CM1)

Neka je Ω_1 $m-$člani skup, Ω_2 $n-$člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2. Neka je α element skupa Ω_1, δ element skupa Ω_2, Δ_1 orbita za djelovanje stabilizatora G_δ na element α i Δ_2 orbita za djelovanje stabilizatora G_α na element δ.

(1) *Ako je $\Delta_2 = \Omega_2$, onda je skup $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup blokova $1-(n,n,1)$ dizajna.*

(2) *Ako je $\Delta_2 \subset \Omega_2$, onda je $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup od m blokova $1-(n,|\Delta_2|,|\Delta_1|)$ dizajna.*

Grupa G djeluje primitivno na opisane dizajne.

Teorem (CM2)

Neka je Ω_1 $m-$*člani skup,* Ω_2 $n-$*člani skup i neka je* G *konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove* Ω_1 *i* Ω_2. *Neka je* α *element skupa* Ω_1, $\delta_1, \ldots, \delta_s$ *predstavnici* $G_\alpha-$*orbita na skupu* Ω_2 *i* $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} G_\alpha.\delta_i$ *uz uvjet da je* $\Delta_2 \neq \Omega_2$. *Tada je*

$$\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$$

skup od m blokova

$$1 - (n, |\Delta_2|, \sum_{i=1}^{s} |G_{\delta_i}.\alpha|)$$

dizajna na kojega grupa G *djeluje primitivno kao grupa automorfizama.*

1−dizajn $\mathcal{D}$ iz teorema CM1 možemo opisati i na sljedeći način.

- Skup točaka Ω_2 je jednak orbiti $G.\delta$.
- $|\mathcal{B}| = |\Omega_1| = |G.\alpha|$
  Blokove dizajna $\mathcal{D}$ možemo predstaviti elementima orbite $G.\alpha$.
- Točka x je sadržana u bloku $g'.\Delta_2$ ako i samo ako postoji $g'' \in G_\alpha$ takav da je $x = (g'g'').\delta$.

  ILI

  Blok $g'.\alpha$ sadrži točku $g.\delta$ ako i samo ako je $g \in g'G_\alpha$.
  Slijedi

$$G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta} = (G_\alpha \cap G_\delta)^g$$

Stabilizator G_α djeluje konjugacijom na skup

$$S = \{G_\alpha \cap G_{g.\delta} \mid g \in G\}.$$

Uz pretpostavku jednakobrojnosti skupa $G_\alpha-$klasa konjugiranosti na S i skupa $G_\alpha-$orbita na Ω_2, možemo jednoznačno svakoj $G_\alpha-$klasi konjugiranosti na S pridružiti $G_\alpha-$orbitu na skupu Ω_2.

Blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ je incidentan s točkom $g.\delta \in \Omega_2$ ako i samo ako su $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta}$ i $G_\alpha \cap G_\delta$ konjugirani u $g'G_\alpha$.

Ako je broj $G_\alpha-$klasa konjugiranosti na S različit od broja $G_\alpha-$orbita na Ω_2, onda je broj $G_\alpha-$orbita na Ω_2 strogo veći od broja $G_\alpha-$klasa konjugiranosti.
U tom slučaju, blokove dizajna možemo definirati kao uniju odgovarajućih $G_\alpha-$orbita.

Osnovni blok je unija orbita čiji su predstavnici elementi $g_1.\delta, ..., g_k.\delta$ takvi da skupovi $G_\alpha \cap G_{g_i.\delta}$, $i = 1, ..., k$, pripadaju istoj klasi $G_\alpha-$konjugiranosti na skupu S.

Općenito:
Blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ je incidentan s točkom $g.\delta \in \Omega_2$ ako i samo ako su $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta}$ i $G_\alpha \cap G_\delta$ konjugirani u $g' G_\alpha$.

Ako je broj klasa izomorfnosti skupa

$$S = \{G_\alpha \cap G_{g.\delta} \mid g \in G\}$$

jednak broju $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2, onda su točka $g.\delta \in \Omega_2$ i blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ u $1-$dizajnu incidentni ako i samo ako je $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta} \cong G_\alpha \cap G_\delta$.

U slučaju da je broj $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2 veći ili jednak broju klasa izomorfnosti skupa S, unijom orbita postižemo da se svakoj klasi izomorfnosti na S može pridružiti barem jedna $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2.

U tom slučaju gore opisanim načinom definicije relacije incidencije nećemo dobiti sve moguće $1-$dizajne.

Svaki 1−dizajn takav da grupa G djeluje primitivno na skupove točaka i blokova tog dizajna je izomorfan dizajnu konstruiranom opisanom metodom, odnosno vrijedi sljedeći teorem.

Teorem

Ako grupa G djeluje primitivno na skup točaka i skup blokova 1−dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, onda postoje skupovi Ω_1 i Ω_2 takvi da su točke i blokovi dizajna $\mathcal{D}$ definirani na način opisan teoremom CM2.

Ako je G jednostavna grupa i H maksimalna podgrupa grupe G, onda je $H = N_G(H)$. Normalizator od H u G je maksimalna podgrupa grupe G te je $|ccl_G H| = [G : H]$.

Jednostavna grupa G djeluje primitivno na klasu konjugiranosti $ccl_G H$, gdje je H maksimalna podgrupa u G.

- G jednostavna grupa
- H_1 i H_2 maksimalne podgrupe
- $\Omega_1 = ccl_G H_1$ i $\Omega_2 = ccl_G H_2$
- $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} ccl_{H_1} K_i$ za neke $K_i \in ccl_G H_2$

Relacija incidencije:

$$(H_2^{g_i}, H_1^{h_j}) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{t} (H_2^{g_i} \cap H_1^{h_j} \cong G_k), \ t \leq s$$

gdje su grupe G_k neke od mogućih presjeka grupa $H_1^{g_i}$ i $H_2^{h_j}$.

Oznaka: $\mathcal{D}(G, H_2, H_1; G_1, ..., G_t)$.

Na sličan način konstruiramo i regularan graf iz skupa $\Omega = ccl_G K$, ako je K maksimalna podgrupa jednostavne grupe G.
Elementima klase $ccl_G K$ možemo predstaviti vrhove regularnog grafa. Taj graf ima $[G:K]$ vrhova i svaki vrh je stupnja $|\Delta| = |\bigcup_{i=1}^{s} ccl_K K_i|$ za neke $K_i \in ccl_G K$.
Relacija susjedstva:

$$(K^{g_i}, K^{g_j}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{t} (K^{g_i} \cap K^{g_j} \cong G_k),\ t \leq s$$

gdje su G_k neke od mogućih grupa presjeka elemenata klase $ccl_G K$.

Oznaka: $\mathcal{G}(G, K; G_1, ..., G_t)$.

Konstruirali smo strukture iz sljedećih jednostavnih grupa.

Oznaka	Struktura	Red
G_1	$U(3,3)$	6048
G_2	$U(4,2)$	25920
G_3	$U(3,4)$	62400
G_4	$U(3,5)$	126000
G_5	$U(5,2)$	13685760
G_6	$U(4,3)$	3265920
G_7	$L(3,5)$	372000
G_8	$L(2,32)$	32736
G_9	$L(2,49)$	58800
G_{10}	$L(4,3)$	6065280

Alati:

- GAP (paketi Design i Grape)
- Magma
- Nauty
- C++

1. Određivanje permutacijskih reprezentacija jednostavne grupe i predstavnika klasa konjugiranosti maksimalne podgrupe.
2. Određivanje presjeka elemenata klasa konjugiranosti dviju odabranih maksimalnih podgrupa.
3. Definiranje relacije incidencije i konstrukcija matrice incidencije.
4. Određivanje pune grupe automorfizama konstruirane strukture i načina djelovanja te grupe na konstruiranu strukturu.
5. Analiza konstruirane strukture.

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3,3)$

Jednostavna grupa $G_1 \cong U(3,3)$ ima četiri maksimalne podgrupe, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{1,1}$	$(E_9 : Z_3) : Z_8$	216	28
$M_{1,2}$	$L(2,7)$	168	36
$M_{1,3}$	$(Z_4 \times Z_4) : S_3$	96	63
$M_{1,4}$	$Z_4.S_4$	96	63

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_1$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,4}; P^2_{1,1,4})$	$2-(28,4,1)$	12096	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}_2$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,3}, M_{1,3}; P^1_{1,3,3}, P^2_{1,3,3}, P^4_{1,3,3})$	$2-(63,31,15)$	20158709760	$PGL(6,2)$
$\mathcal{D}_3$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,4}, M_{1,4}; P^1_{1,4,4}, P^3_{1,4,4}, P^4_{1,4,4})$	$2-(63,31,15)$	12096	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}_4$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,2}, M_{1,2}; P^1_{1,2,2}, P^3_{1,2,2})$	$2-(36,15,6)$	12096	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}_5$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,3}; P^1_{1,1,3})$	$2-(28,12,11)$	1451520	$PSp(6,2)$
$\mathcal{D}_6$	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,2}, M_{1,3}; P^2_{1,2,3})$	$2-(36,16,12)$	1451520	$PSp(6,2)$
$\mathcal{G}_1$	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,2}; P^3_{1,2,2})$	$(36,14,4,6)$	12096	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{G}_2$	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,3}; P^2_{1,3,3}, P^4_{1,3,3})$	$(63,30,13,15)$	1451520	$PSp(6,2)$
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_5, \{4,6\}, \{6\})$			
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_6, \{6,8\}, \{6\})$			
$\mathcal{G}_3$	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,4}; P^3_{1,4,4}, P^4_{1,4,4})$	$(63,30,13,15)$	12096	$U(3,3):Z_2$
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_1, \{0,1\}, \{1\})$			

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(4,2)$

Grupa $G_2 \cong U(4,2)$ je izomorfna projektivnoj simpletičkoj grupi $PSp(4,3)$. Red grupe G_2 je 25920. Grupa G_2 ima, do na konjugaciju, pet klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{2,1}$	$E_{16} : A_5$	960	27
$M_{2,2}$	S_6	720	36
$M_{2,3}$	$E_{27} : S_4$	648	40
$M_{2,4}$	$(E_9 : Z_3) : SL(2,3)$	648	40
$M_{2,5}$	$Z_2.(A_4 \times A_4).Z_2$	576	45

Unitarne grupe

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_7$	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,2}, M_{2,2}; P^2_{2,2,2})$	$2-(36,15,6)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{D}_8$	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,3}, M_{2,3}; P^2_{2,3,3}, P^3_{2,3,3})$	$2-(40,13,4)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{D}_9$	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,4}, M_{2,4}; P^2_{2,4,4}, P^3_{2,4,4})$	$2-(40,13,4)$	12130560	$PGL(4,3)$
$\mathcal{D}_{10}$	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,5}, M_{2,5}; P^2_{2,5,5})$	$2-(45,12,3)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{G}_4$	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,1}; P^2_{2,1,1})$	$(27,10,1,5)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{G}_5$	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,2}; P^2_{2,2,2})$	$(36,15,6,6)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{G}_6$	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,3}; P^2_{2,3,3})$	$(40,12,2,4)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{G}_7$	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,4}; P^2_{2,4,4})$	$(40,12,2,4)$	51840	$U(4,2):Z_2$
$\mathcal{G}_8$	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,5}; P^2_{2,5,5})$	$(45,12,3,3)$	51840	$U(4,2):Z_2$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3,4)$

Unitarna grupa $G_3 \cong U(3,4)$ je jednostavna grupa reda 62400 koja ima četiri klase konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{3,1}$	$(E_{16} : E_4) : Z_{15}$	960	65
$M_{3,2}$	$A_5 \times Z_5$	300	208
$M_{3,3}$	$E_{25} : S_3$	150	416
$M_{3,4}$	$Z_{13} : Z_3$	39	1600

Unitarne grupe

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_{11}$	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,2}; P^1_{3,1,2})$	$2-(65,5,1)$	249600	$U(3,4):Z_4$
$\mathcal{D}_{12}$	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,3}; P^2_{3,1,3})$	$2-(65,15,21)$	249600	$U(3,4):Z_4$
$\mathcal{D}_{13}$	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,4}; P^2_{3,1,4})$	$2-(65,26,250)$	249600	$U(3,4):Z_4$
$\mathcal{G}_9$	$\mathcal{G}(G_3, M_{3,2}; P^2_{3,2,2})$ $\mathcal{G}(\mathcal{D}_{11}, \{0,1\}, \{1\})$	$(208,75,30,25)$	249600	$U(3,4):Z_4$
$\mathcal{G}_{10}$	$\mathcal{G}(G_3, M_{3,3}; P^4_{3,3,3})$ $\mathcal{G}(\mathcal{D}_{12}, \{2,3,5\}, \{3\})$	$(416,100,36,20)$	503193600	$G(2,4):Z_2$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3,5)$

Grupa $G_4 \cong U(3,5)$ je jednostavna grupa reda 126000 koja ima osam maksimalnih podgrupa, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{4,1}$	A_7	2520	50
$M_{4,2}$	A_7	2520	50
$M_{4,3}$	A_7	2520	50
$M_{4,4}$	$(E_{25} : Z_5) : Z_8$	1000	126
$M_{4,5}$	$A_6.Z_2$	720	175
$M_{4,6}$	$A_6.Z_2$	720	175
$M_{4,7}$	$A_6.Z_2$	720	175
$M_{4,8}$	$Z_2.A_5.Z_2$	240	525

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\|\mathrm{Aut}\mathcal{D}\|$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_{14}$	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,1}, M_{4,5}; P^1_{4,1,5}, P^2_{4,1,5})$	$2-(50,14,13)$	252000	$U(3,5):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,2}, M_{4,6}; P^1_{4,2,6}, P^2_{4,2,6})$			
	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,3}, M_{4,7}; P^1_{4,3,7}, P^2_{4,3,7})$			
$\mathcal{D}_{15}$	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,8}; P^2_{4,4,8})$	$2-(126,6,1)$	756000	$U(3,5):S_3$
$\mathcal{D}_{16}$	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,5}; P^2_{4,4,5})$	$2-(126,36,14)$	252000	$U(3,5):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,6}; P^2_{4,4,6})$			
	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,7}; P^2_{4,4,7})$			
$\mathcal{G}_{11}$	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,1}; P^2_{4,1,1})$	$(50,7,0,1)$	252000	$U(3,5):Z_2$
	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,2}; P^2_{4,2,2})$			
	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,3}; P^2_{4,3,3})$			
$\mathcal{G}_{12}$	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,5}; P^2_{4,5,5})$	$(175,72,20,36)$	252000	$U(3,5):Z_2$
	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,6}; P^2_{4,6,6})$			
	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,7}; P^2_{4,7,7})$			
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_{14}, \{3,4,8\}, \{3\})$			
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_{16}, \{6,10,11\}, \{11\})$			
$\mathcal{G}_{13}$	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,8}; P^2_{4,8,8})$	$(525,144,48,36)$	756000	$U(3,5):S_3$
	$\mathcal{G}(D_{15}, \{0,1\}, \{1\})$			

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(5,2)$

Grupa $G_5 \cong U(5,2)$ je jednostavna grupa reda 13685760 koja ima, do na konjugaciju, šest maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{5,1}$	$(E_{64}:Z_2).(E_9:Z_3).SL(2,3)$	829444	165
$M_{5,2}$	$Z_3 \times U(4,2)$	46080	176
$M_{5,3}$	$(E_{16}:E_{16}):(Z_3 \times A_5)$	77760	297
$M_{5,4}$	$E_{81}:S_5$	9720	1408
$M_{5,5}$	$(S_3 \times (E_9:Z_3)):SL(2,3)$	3888	3520
$M_{5,6}$	$L(2,11)$	660	20736

Unitarne grupe

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert\mathrm{Aut}\mathcal{D}\rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{G}_{14}$	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,1}; P^2_{5,1,1})$	$(165, 36, 3, 9)$	27371520	$U(5,2) : Z_2$
$\mathcal{G}_{15}$	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,2}; P^2_{5,2,2})$	$(176, 40, 12, 8)$	27371520	$U(5,2) : Z_2$
$\mathcal{G}_{16}$	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,3}; P^2_{5,3,3})$	$(297, 40, 7, 5)$	27371520	$U(5,2) : Z_2$
$\mathcal{G}_{17}$	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,4}; P^2_{5,4,4}, P^3_{5,4,4}, P^4_{5,4,4})$	$(1408, 567, 246, 216)$	18393661440	$Fi_{21} : Z_2$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(4,3)$

Grupa $G_6 \cong U(4,3)$ je jednostavna grupa reda 3265920. Do na konjugaciju, grupa G_6 ima 16 maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{6,1}$	$E_{81} : A_6$	29160	112
$M_{6,2}$	$U(4,2)$	25920	126
$M_{6,3}$	$U(4,2)$	25920	126
$M_{6,4}$	$L(3,5)$	20160	162
$M_{6,5}$	$L(3,5)$	20160	162
$M_{6,6}$	$(Ex_{243}^{+} : Q_2).S_3$	11664	280
$M_{6,7}$	$U(3,3)$	6048	540
$M_{6,8}$	$E_{16} : A_6$	5760	567
$M_{6,9}$	$E_{16} : A_6$	5760	567
$M_{6,10}$	A_7	2520	1296
$M_{6,11}$	A_7	2520	1296
$M_{6,12}$	A_7	2520	1296
$M_{6,13}$	A_7	2520	1296
$M_{6,14}$	$((E_8.Z_{12}) : Z_6) : Z_2$	1152	2835
$M_{6,15}$	$A_6.Z_2$	720	4536
$M_{6,16}$	$A_6.Z_2$	720	4536

Unitarne grupe

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{G}_{18}$	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,1}; P^2_{6,1,1})$	$(112, 30, 2, 10)$	26127360	$U(4,3) : D_4$
$\mathcal{G}_{19}$	$\mathcal{G}(G_4, M_{6,2}; P^2_{6,2,2})$	$(126, 45, 12, 18)$	13063680	$(U(4,3) : Z_2) : Z_2$
	$\mathcal{G}(G_4, M_{6,3}; P^2_{6,3,3})$			
$\mathcal{G}_{20}$	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,4}; P^1_{6,4,4})$	$(162, 56, 10, 24)$	13063680	$(U(4,3) : Z_2) : Z_2$
	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,5}; P^1_{6,5,5})$			
$\mathcal{G}_{21}$	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,6}; P^2_{6,6,6})$	$(280, 36, 8, 4)$	26127360	$U(4,3) : D_4$
$\mathcal{G}_{22}$	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,7}; P^2_{6,7,7})$	$(540, 224, 88, 96)$	26127360	$U(4,3) : D_4$

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(3,5)$

Grupa $G_7 \cong L(3,5)$ je jednostavna grupa reda 372000 koja ima pet klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{7,1}$	$E_{25} : GL(2,5)$	12000	31
$M_{7,2}$	$E_{25} : GL(2,5)$	12000	31
$M_{7,3}$	S_5	120	3100
$M_{7,4}$	$(Z_4 \times Z_4) : S_3$	96	3875
$M_{7,5}$	F_{93}	93	4000

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_{17}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,2}; P^2_{7,1,2})$	$2-(31,6,1)$	744000	$L(3,5):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,1}; P^2_{7,1,2})$			
$\mathcal{D}_{18}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P^3_{7,1,3})$	$2-(31,6,100)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P^3_{7,2,3})$			
$\mathcal{D}_{19}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P^2_{7,1,3})$	$2-(31,10,300)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P^2_{7,2,3})$			
$\mathcal{D}_{20}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P^1_{7,1,3})$	$2-(31,15,700)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P^1_{7,2,3})$			
$\mathcal{D}_{21}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P^3_{7,1,4})$	$2-(31,3,25)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P^3_{7,2,4})$			
$\mathcal{D}_{22}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P^2_{7,1,4})$	$2-(31,12,550)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P^2_{7,2,4})$			
$\mathcal{D}_{23}$	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P^1_{7,1,4})$	$2-(31,15,875)$	372000	$L(3,5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P^1_{7,2,4})$			

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(2, 32)$

Grupa G_8 je jednostavna grupa reda 32736 koja ima tri maksimalne podgrupe, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{8,1}$	$E_{32} : Z_{31}$	992	33
$M_{8,2}$	D_{33}	66	496
$M_{8,3}$	D_{31}	62	528

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert\mathrm{Aut}\mathcal{D}\rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{G}_{23}$	$\mathcal{G}(G_8, M_{8,3}; P^1_{8,3,3})$	$(528, 62, 31, 4)$	$33!$	S_{33}

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(2,49)$

Jednostavna linearna grupa $G_9 \cong L(2,49)$ ima 58800 elemenata i, do na konjugaciju, sedam maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{9,1}$	$E_{49} : Z_{24}$	1176	50
$M_{9,2}$	$PGL(2,7)$	336	175
$M_{9,3}$	$PGL(2,7)$	336	175
$M_{9,4}$	A_5	60	980
$M_{9,5}$	A_5	60	980
$M_{9,6}$	D_{25}	50	1176
$M_{9,7}$	D_{24}	48	1225

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_{24}$	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,2}; P^1_{9,1,2})$	$2-(50,8,4)$	117600	$L(2,49):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,3}; P^1_{9,1,3})$			
$\mathcal{D}_{25}$	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,4}; P^2_{9,1,4})$	$2-(50,20,152)$	117600	$L(2,49):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,5}; P^2_{9,1,5})$			

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(4,3)$

Grupa $G_{10} \cong L(4,3)$ je jednostavna grupa reda 6065280 koja ima, do na konjugaciju, osam klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{10,1}$	$E_{27} : L(3,3)$	151632	40
$M_{10,2}$	$E_{27} : L(3,3)$	151632	40
$M_{10,3}$	$U(4,3) : Z_2$	51840	117
$M_{10,4}$	$U(4,3) : Z_2$	51840	117
$M_{10,5}$	$(E_8 : SL(2,3)) : S_4$	46656	130
$M_{10,6}$	$A_6 : D_4$	2880	2106
$M_{10,7}$	$A_6 : Z_2$	720	8424
$M_{10,8}$	$S_4 : S_4$	567	10530

Linearne grupe

$\mathcal{D}$	Konstrukcija	Parametri	$\lvert \mathrm{Aut}\mathcal{D} \rvert$	$\mathrm{Aut}\mathcal{D}$
$\mathcal{D}_9$	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,1}, M_{10,2}; P^1_{10,1,2})$	$2-(40,13,4)$	12130560	$PGL(4,3)$
$\mathcal{D}_{26}$	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,1}, M_{10,5}; P^1_{10,1,5})$	$2-(40,13,1)$	12130560	$L(4,3):Z_2$
	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,2}, M_{10,5}; P^1_{10,2,5})$			
$\mathcal{G}_{24}$	$\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,3}; P^2_{10,3,3})$	$(117,36,15,9)$	12130560	$L(4,3):Z_2$
	$\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,4}; P^2_{10,4,4})$			
$\mathcal{G}_{25}$	$\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,5}; P^2_{10,5,5})$	$(130,48,20,16)$	24261120	$L(4,3):E_4$
	$\mathcal{G}(D_{26}, \{0,1\}, \{1\})$			

- $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,4}; P^2_{1,1,4})$ je unital s parametrima $2-(28, 4, 1)$ konstruiran iz jednostavne grupe $G_1 \cong U(3, 3)$.
- $\mathcal{S}_1 = \mathcal{D}(G_1, M_{1,4}, M_{1,4}; Z_4 \times Z_4)$ je semi-simetričan dizajn s parametrima $2-(63, 6, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\mathrm{Aut}\, G_1$.

Neka je $\mathbf{U}_1$ matrica incidencije unitala $\mathcal{D}_1$ i neka je $\mathbf{S}_1$ matrica incidencije semi-simetričnog dizajna $\mathcal{S}_1$. Tada je

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{28} & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1^T & \mathbf{S}_1 \end{bmatrix}$$

matrica incidencije simetričnog dizajna s parametrima $2-(91, 10, 1)$. Taj dizajn je Desarguesova projektivna ravnina $PG(2, 9)$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $P\Gamma L(3, 9)$.

- Iz grupe $U(3,4)$ konstruirani su $2-(65,5,1)$ dizajn, semi-simetričan $2-(208,12,(1))$ dizajn te Desarguesova projektivna ravnina $PG(2,16)$.
- Iz grupe $U(3,5)$ konstruirani su $2-(126,6,1)$ dizajn, semi-simetričan $2-(525,20,(1))$ dizajn te Desarguesova projektivna ravnina $PG(2,25)$.
- Iz grupe $U(3,7)$ konstruirani su $2-(344,8,1)$ dizajn, semi-simetričan $2-(2107,42,(1))$ dizajn te Desarguesova projektivna ravnina $PG(2,49)$.

Hipoteza

Iz konjugacijski klasa maksimalnih podgrupa jednostavne grupe $U(3, q)$, gdje je $q = p^n$ za p prost broj i n prirodan broj, se može konstruirati hermitski unital s parametrima $2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$ čija je puna grupa automorfizma izomorfna grupi $\mathrm{Aut}\,U(3, q)$, semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (q^4 - q^3 + q^2, q^2 - q, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\mathrm{Aut}\,U(3, q)$ te Desarguesova projektivna ravnina $PG(2, q^2)$ na opisani način.

- Zašto su neki $1-$dizajni konstruirani opisanom metodom ujedno i $2-$dizajni?
- Zašto su neki regularni grafovi konstruirani opisanom metodom ujedno i jako regularni?
- Možemo li oslabiti pretpostavke teorema konstrukcije?
- Možemo li iz svake unitarne grupe $U(3, q)$ konstruirati projektivnu ravninu na opisani način?