Primitivne grupe kao dizajni

Vedrana Mikulić (vmikulic@math.uniri.hr)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

16. listopad 2008.

Grupa G djeluje na skup X ako postoji homomorfizam $F : G \to S(X)$.

- za svaki $x \in X$ vrijedi $|G.x| = [G : G_x]$, gdje je $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$
- stabilizator G_x elementa $x \in X$ djeluje na skup X i vrijedi $(G_x)_y = (G_y)_x$ za svaki $y \in X$
- $G_{g.x} = gG_xg^{-1}$, $\forall g \in G$

Grupa G djeluje tranzitivno na skup X ako postoji element $x \in X$ takav da je $G.x = \{g.x \mid g \in G\} = X$.

Grupa G djeluje primitivno na skup X ako G djeluje tranzitivno na skup X i ako je G_x maksimalna podgrupa grupe G za svaki $x \in X$.

Primjer

Djelovanje grupe G na skup svih svojih podgrupa P konjugacijom.

$$f_g : P \to P,\ f_g(H) = H^g$$

$$F : G \to S(P),\ g \mapsto f_g$$

Orbita (klasa konjugiranosti): $ccl_G H = \{H^g \mid g \in G\},\ H \leq G$
Stabilizator (normalizator): $N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = H\},\ H \leq G$
Vrijedi:

- $|ccl_G H| = [G : N_G(H)]$
- $H \trianglelefteq N_G(H) \leq G$

Primjer

Ako je G jednostavna grupa i H maksimalna podgrupa grupe G, onda je $H = N_G(H)$. Normalizator od H u G je maksimalna podgrupe grupe G te je $|ccl_G H| = [G : H]$.

Jednostavna grupa G djeluje primitivno na klasu konjugiranosti $ccl_G H$, gdje je H maksimalna podgrupa u G.

Struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je $t-(v, k, \lambda)$ dizajn ako vrijedi:

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa $\mathcal{B}$ incidentan je s točno k elemenata skupa $\mathcal{P}$,
3. svakih t elemenata skupa $\mathcal{P}$ incidentno je s točno λ elemenata skupa $\mathcal{B}$.

$2-(v, k, \lambda)$ dizajn naziva se blok dizajn.
$t-(v, k, \lambda)$ dizajn takav da je $v = b$ naziva se simetričan dizajn.

Za dizajn u kojemu je svaka od v točaka stupnja r i svaki od b blokova stupnja k vrijedi $vr = bk$.

Puna grupa automorfizama dizajna $\mathcal{D}$ je grupa svih bijektivnih preslikavanja koja preslikavaju skup točaka na skup točaka i skup blokova na skup blokova te čuvaju incidenciju.

Key, Moori: Codes, Designs and Graphs from the Janko Groups J_1 and J_2, J. Combin. Math. Combin. Comput. 40 (2002), 143-159.

Teorem (KM)

Neka je Ω $n-$člani skup, α element skupa Ω i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skup Ω. Neka je $\Delta \neq \{\alpha\}$, orbita za djelovanje stabilizatora G_α na neki element $\beta \in \Omega$, $\Delta = \{g.\beta \mid g \in G_\alpha\}$. Tada je

(1) *$\mathcal{B} = \{g.\Delta \mid g \in G\}$ $n-$člani skup blokova simetričnog samodualnog $1-(n, |\Delta|, |\Delta|)$ dizajna na kojega grupa G primitivno djeluje kao grupa automorfizama,*

(2) *za $\delta \in \Delta$, skup $\mathcal{E} = \{g.\{\alpha, \delta\} \mid g \in G\}$ je skup bridova povezanog $|\Delta|-$regularnog grafa sa n vrhova na kojega grupa G primitivno djeluje kao grupa automorfizama.*

Key, Moori, Rodrigues: On some designs and codes from primitive representations of some finite simple groups, J. Combin. Math. Combin. Comput. 45 (2003)

Lema

Neka grupa G djeluje primitivno na simetričan samodualan dizajn $\mathcal{D}$ i neka su stabilizatori blokova i točaka dizajna konjugirani za djelovanje grupe G. Tada se dizajn $\mathcal{D}$ može konstruirati na način opisan teoremom KM.

D. Crnković, V. Mikulić: Unitals, projective planes and other combinatorial structures constructed from the unitary groups $U(3, q)$, $q = 3, 4, 5, 7$, Ars Combin., prihvaćen za objavljivanje

Teorem (CM)

Neka je Ω_1 $m-$člani skup, Ω_2 $n-$člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2. Neka je α element skupa Ω_1, δ element skupa Ω_2, Δ_1 orbita za djelovanje stabilizatora G_δ na element α i Δ_2 orbita za djelovanje stabilizatora G_α na element δ.

(1) *Ako je $\Delta_2 = \Omega_2$, onda je skup $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup blokova $1-(n, n, 1)$ dizajna.*

(2) *Ako je $\Delta_2 \subset \Omega_2$, onda je $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup od m blokova $1-(n, |\Delta_2|, |\Delta_1|)$ dizajna.*

Grupa G djeluje primitivno na opisane dizajne.

Teorem

Neka je Ω_1 $m-$člani skup, Ω_2 $n-$člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2. Neka je α element skupa Ω_1, $\delta_1, ..., \delta_s$ elementi skupa Ω_2 i

$$\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} G_\alpha.\delta_i$$

uz uvjet da $\Delta_2 \neq \Omega_2$. Tada je $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup od m blokova

$$1 - (n, |\Delta_2|, \sum_{i=1}^{s} |G_{\delta_i}.\alpha|)$$

dizajna na kojega grupa G djeluje primitivno kao grupa automorfizama.

Korolar

Neka je Ω $n-$člani skup, α element skupa Ω i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skup Ω. Neka je

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{s} G_{\alpha}.\delta_i$$

za $\delta_1, ..., \delta_s$ elementi skupa Ω_2 uz uvjet da $\Delta_2 \neq \Omega_2$. Tada je skup $\mathcal{B} = \{g.\Delta \mid g \in G\}$ skup blokova simetričnog samodualnog dizajna s parametrima

$$1-(n, |\Delta|, \sum_{i=1}^{s} |G_{\delta_i}.\alpha|),$$

a skup $\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{s}\{g.\{\alpha, \delta_i\} \mid g \in G\}$ je skup bridova regularnog grafa stupnja $|\Delta|$. Grupa G djeluje primitivno kao grupa automorfizama na opisani dizajn i graf.

1−dizajn $\mathcal{D}$ iz teorema CM možemo opisati i na sljedeći način.

- Skup točaka Ω_2 je jednaki orbiti $G.\delta$.
- $|\mathcal{B}| = |\Omega_1| = |G.\alpha|$
  Blokove dizajna $\mathcal{D}$ možemo predstaviti elementima orbite $G.\alpha$.
- Točka x je sadržana u bloku $g'.\Delta_2$ ako i samo ako postoji $g'' \in G_\alpha$ takav da je $x = (g'g'').\delta$.

  ILI

  Blok $g'.\alpha$ sadrži točku $g.\delta$ ako i samo ako je $g \in g'G_\alpha$.
  Slijedi

$$\begin{aligned} G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta} &= G_{g'.\alpha} \cap G_{(g'g'').\delta} = G_\alpha^{g'} \cap G_{g''.\delta}^{g'} = (G_\alpha \cap G_{g''.\delta})^{g'} \\ &= (G_\alpha \cap G_\delta^{g''})^{g'} = (G_\alpha^{(g'')^{-1}} \cap G_\delta)^{g'g''} = (G_\alpha \cap G_\delta)^g \end{aligned}$$

Za $g' \in G_\alpha$ vrijedi

$$(G_\alpha \cap G_{g.\delta})^{g'} = G_\alpha^{g'} \cap G_{g.\delta}^{g'} = G_\alpha \cap G_{(g'g).\delta}$$

pa stabilizator G_α djeluje konjugacijom na skup

$$S = \{G_\alpha \cap G_{g.\delta} \mid g \in G\}.$$

Neka je m broj klasa konjugiranosti za djelovanje grupe G_α na skup S i neka je m jednak broju $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2.

Uz pretpostavku jednakobrojnosti skupa $G_\alpha-$klasa konjugiranosti na S i skupa $G_\alpha-$orbita na Ω_2, možemo jednoznačno svakoj $G_\alpha-$klasi konjugiranosti na S pridružiti $G_\alpha-$orbitu na skupu Ω_2.

Blok $\alpha \in \Omega_1$ je incidentan s točkom $g.\delta \in \Omega_2$ ako i samo ako su $G_\alpha \cap G_{g.\delta}$ i $G_\alpha \cap G_\delta$ konjugirani u G_α.

Općenito, blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ je incidentan s točkom $g.\delta \in \Omega_2$ ako i samo ako su $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta}$ i $G_\alpha \cap G_\delta$ konjugirani u $g' G_\alpha$.

Ako je broj $G_\alpha-$klasa konjugiranosti na S različit od broja $G_\alpha-$orbita na Ω_2, onda je broj $G_\alpha-$orbita na Ω_2 strogo veći od broja $G_\alpha-$klasa konjugiranosti.
U tom slučaju, blokove dizajna možemo definirati kao uniju odgovarajućih $G_\alpha-$orbita.

Osnovni blok je unija orbita čiji su predstavnici elementi $g_1.\delta, ..., g_k.\delta$ takvi da skupovi $G_\alpha \cap G_{g_i.\delta}$, $i = 1, ..., k$, pripadaju istoj klasi $G_\alpha-$konjugiranosti na skupu S.

Općenito, blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ je incidentan s točkom $g.\delta \in \Omega_2$ ako i samo ako su $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta}$ i $G_\alpha \cap G_\delta$ konjugirani u $g'G_\alpha$.

Ako je broj klasa izomorfnosti skupa S jednak broju $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2, onda su točka $g.\delta \in \Omega_2$ i blok $g'.\alpha \in \Omega_1$ u $1-$dizajnu incidentni ako i samo ako je $G_{g'.\alpha} \cap G_{g.\delta} \cong G_\alpha \cap G_\delta$.

U slučaju da je broj $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2 veći ili jednak broju klasa izomorfnosti skupa S, unijom orbita postižemo da se svakoj klasi izomorfnosti na S može pridružiti barem jedna $G_\alpha-$orbita na skupu Ω_2.

U tom slučaju gore opisanim načinom definicije relacije incidencije nećemo dobiti sve moguće $1-$dizajne.

Napomena

Uniji G_α−orbita odgovara unija odgovarajućih klasa konjugiranosti na skupu S, odnosno unija odgovarajućih klasa izomorfnosti na skupu S.

Svaki $1-$dizajn takav da grupa G djeluje primitivno na skupove točaka i blokova tog dizajna je izomorfan dizajnu konstruiranom opisanom metodom, odnosno vrijedi sljedeći teorem.

Teorem

Ako grupa G djeluje primitivno na skup točaka i skup blokova $1-$dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, onda postoje skupovi Ω_1 i Ω_2 takvi da su točke i blokovi dizajna $\mathcal{D}$ definirani na način opisan teoremom CM.

- G jednostavna grupa
- H_1 i H_2 maksimalne podgrupe
- $\Omega_1 = ccl_G H_1$ i $\Omega_2 = ccl_G H_2$
- $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} ccl_{K_i} H_2$ za neke $K_i \in ccl_G H_1$

Relaciju incidencije:

$$(H_2^{g_i}, H_1^{h_j}) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{s} (H_2^{g_i} \cap H_1^{h_j} \cong G_k),$$

gdje su grupe G_k neke od mogućih presjeka grupa $H_1^{g_i}$ i $H_2^{h_j}$.
Oznaka: $\mathcal{D}(G, H_2, H_1; G_1, ..., G_s)$.

Primjer u programskom paketu GAP

Na sličan način konstruiramo i regularan graf iz skupa $\Omega = ccl_G K$, ako je K maksimalna podgrupa jednostavne grupe G.
Elementima klase $ccl_G K$ možemo predstaviti vrhove regularnog grafa. Taj graf ima $[G : K]$ vrhova i svaki vrh je stupnja $|\Delta| = |\bigcup_{i=1}^{s} ccl_{K_i} K|$ za neke $K_i \in ccl_G K$.
Relacija susjedstva:

$$(K^{g_i}, K^{g_j}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^{s} (K^{g_i} \cap K^{g_j} \cong G_k),$$

gdje su G_k neke od mogućih grupa presjeka elemenata klase $ccl_G K$.
Oznaka: $\mathcal{G}(G, K; G_1, ..G_s)$.

O grupi automorfizama i izomorfnim dizajnima

Neka je G grupa, $f \in AutG$ i neka su H i K maksimalne podgrupe grupe G. Tada je:

- $\mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s) \cong \mathcal{D}(G, f(H), f(K); G_1, ..., G_s)$,
- $\mathcal{G}(G, H; G_1, ..., G_s) \cong \mathcal{G}(G, f(H); G_1, ..., G_s)$.

Ako su klase izomorfnosti maksimalnih podgrupa H i K u G jednake klasama konjugiranosti tih podgrupa u G, onda je

$$AutG \leq Aut\mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s).$$

Ako postoji $f \in AutG$ i podgrupa H' takva da je $f(H') = H$, ali da H i H' nisu konjugirani u G, onda vrijedi:

- $G \cong IntG \leq Aut\mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s)$,
- $AutG \not\leq Aut\mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s)$.

Ako $f \in AutG$ nije automorfizam dizajna $\mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s)$, onda je

$$\mathcal{D}(G, f(H), f(K); G_1, ..., G_s) \cong \mathcal{D}(G, H, K; G_1, ..., G_s).$$