Eliminacija izomorfnih dizajna prilikom njihove konstrukcije

Doris Dumičić
ddumicic@math.uniri.hr

- **D. Crnković, S. Rukavina**: Construction of block designs admitting an abelian automorphism group, Metrika (2005) 62: 175-183

- **D. Crnković, S. Rukavina**: Unique symmetric $(66, 26, 10)$ design admitting an automorphism of order 55

Orbitne matrice

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ $2-(v,k,\lambda)$ dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$.
G- orbite točaka označimo s $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ i G-orbite blokova s $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_m$ i označimo $|\mathcal{P}_r| = \omega_r$, $|\mathcal{B}_i| = \Omega_i$, $1 \leq r \leq n$, $1 \leq i \leq m$.
Točke orbite $\mathcal{P}_r$ označimo s $r_0, \ldots, r_{\omega_{r-1}}$. Očito vrijede sljedeće jednakosti:

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r = v, \sum_{i=1}^{m} \Omega_i = b, \text{gdje} \quad \text{je} \quad b = |\mathcal{B}|$$

.

Neka su zadani $x \in \mathcal{B}_i$ i $P \in \mathcal{P}_r$ i $g \in G$. Tada vrijedi $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = |\langle xg \rangle \cap \mathcal{P}_r|$.
Stoga, kardinalni broj $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = \gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru bloka $x \in \mathcal{B}_i$.
Isto tako $|\langle P \rangle \cap \mathcal{B}_i| = \Gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru predstavnika $P \in \mathcal{P}_r$.

Neka su zadani $x \in \mathcal{B}_i$ i $P \in \mathcal{P}_r$ i $g \in G$. Tada vrijedi $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = |\langle xg \rangle \cap \mathcal{P}_r|$.
Stoga, kardinalni broj $|\langle x \rangle \cap \mathcal{P}_r| = \gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru bloka $x \in \mathcal{B}_i$.
Isto tako $|\langle P \rangle \cap \mathcal{B}_i| = \Gamma_{ir}$ ne zavisi o izboru predstavnika $P \in \mathcal{P}_r$.

Propozicija

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ blok dizajn, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ i Ω_i, ω_r i γ_{ir} definirani kao ranije. Vrijede sljedeće jednakosti:

1) $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \gamma_{ir} = k$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\Omega_i}{\omega_r} \gamma_{ir}\gamma_{is} = \lambda\omega_s + \delta_{rs}(r^1 - \lambda)$.

Očito vrijedi $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ir} = r^1$.

Definicija

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija

Indeksni skup za element (i,r) orbitne matrice je skup indeksa točaka orbite $\mathcal{P}_r$ koji označavaju koja je točka te orbite incidentna s predstavnikom orbite blokova $\mathcal{B}_i$.

Definicija

$(m \times n)$ matrica (γ_{ir}) čiji elementi zadovoljavaju svojstva (1) i (2) naziva se **orbitna matrica** za parametre (v, k, λ) i razdiobu orbita $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $(\Omega_1, \ldots, \Omega_m)$.

Definicija

Indeksni skup za element (i,r) orbitne matrice je skup indeksa točaka orbite $\mathcal{P}_r$ koji označavaju koja je točka te orbite incidentna s predstavnikom orbite blokova $\mathcal{B}_i$.

Konstrukcija blok dizajna pod djelovanjem pretpostavljene grupe automorfizama sastoji se od dva osnovna koraka:

1. Konstrukcije orbitnih matrica za danu grupu automorfizama,
2. Konstrukcije blok dizajna za dobivene orbitne matrice. Ovaj se korak često naziva **indeksiranje orbitnih matrica**.

Konstrukcija blok dizajna djelovanjem abelove grupe automorfizama

Teorem 1

Svaka konačna abelova grupa je direktni produkt cikličkih grupa.

Konstrukcija blok dizajna djelovanjem abelove grupe automorfizama

Teorem 1

Svaka konačna abelova grupa je direktni produkt cikličkih grupa.

Teorem 2

Neka je $\Omega \neq \emptyset$ konačan skup, $G \leq S(\Omega)$ i $H \triangleleft G$. Zatim, neka su x, y elementi iste G-orbite. Tada $|xH| = |yH|$.

Postupak konstrukcije blok dizajna pod djelovanjem abelove grupe automorfizama $G = C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_s$ sastoji se od $s + 1$ koraka:

Korak 1: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje grupe G
Korak 2: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje normalne podgrupe $C_1 \times \ C_2 \times \ldots \times C_{s-1}$

$\vdots$

Korak s: Konstrukcija orbitnih matrica za djelovanje normalne podgrupe C_1
Korak (s+1): Indeksiranje orbitnih matrica za C_1 uzimajući u obzir djelovanje grupa $C_2, C_3, \ldots, C_{s-1}$ i C_s na dizajne.

Primjena grupa $C_2, C_3, \ldots, C_{s-1}$ i C_s u koraku (s+1) ubrzava proces indeksiranja.

Eliminacija izomorfnih dizajna prilikom njihove konstrukcije

Eliminacija izomorfnih dizajna prilikom njihove konstrukcije

Definicija: G-izomorfizam

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_2)$ blok dizajni i $G \leq Aut(\mathcal{D}_1) \cap Aut(\mathcal{D}_2)$. Izomorfizam $\alpha : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ je **G-izomorfizam** iz $\mathcal{D}_1$ na $\mathcal{D}_2$ ako postoji automorfizam $\tau : G \to G$ takav da $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ i $\forall g \in G$ vrijedi: $(P\alpha)(g\tau) = Q\alpha \Leftrightarrow Pg = Q$.
Ako $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, α zovemo G-automorfizam.

Eliminacija izomorfnih dizajna prilikom njihove konstrukcije

Definicija: G-izomorfizam

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_2)$ blok dizajni i $G \leq Aut(\mathcal{D}_1) \cap Aut(\mathcal{D}_2)$. Izomorfizam $\alpha : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ je **G-izomorfizam** iz $\mathcal{D}_1$ na $\mathcal{D}_2$ ako postoji automorfizam $\tau : G \to G$ takav da $\forall P, Q \in \mathcal{P}$ i $\forall g \in G$ vrijedi: $(P\alpha)(g\tau) = Q\alpha \Leftrightarrow Pg = Q$. Ako $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$, α zovemo G-automorfizam.

Napomena

Neka je α G-izomorfizam s $\mathcal{D}_1$ na $\mathcal{D}_2$. Točke P i Q su u istoj G-orbiti akko su točke $P\alpha$ i $Q\alpha$ u istoj G-orbiti. Blokovi x i y su u istoj G-orbiti akko su blokovi $x\alpha$ i $y\alpha$ u istoj G-orbiti.

Lema

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_2)$ blok dizajni, $G \leq Aut(\mathcal{D}_1) \cap Aut(\mathcal{D}_2)$. Permutacija $\alpha \in S = S(\mathcal{P}) \times S(\mathcal{B})$ je G-izomorfizam iz $\mathcal{D}_1$ na $\mathcal{D}_2$ akko je α sadržana u normalizatoru $N_S(G)$.

Lema

Neka su $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_1)$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_2)$ blok dizajni, $G \leq Aut(\mathcal{D}_1) \cap Aut(\mathcal{D}_2)$. Permutacija $\alpha \in S = S(\mathcal{P}) \times S(\mathcal{B})$ je G-izomorfizam iz $\mathcal{D}_1$ na $\mathcal{D}_2$ akko je α sadržana u normalizatoru $N_S(G)$.

Propozicija

Neka je G grupa automorfizama blok dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, $S = S(\mathcal{P}) \times S(\mathcal{B})$ i $\alpha \in N_S(G)$. Tada je α G-izomorfizam s $\mathcal{D}$ na $\mathcal{D}_\alpha = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I}_\alpha)$, pri čemu je $(P_\alpha, x_\alpha) \in \mathcal{I}_\alpha \Leftrightarrow (P, x) \in \mathcal{I}$.

Teorem

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji bijekcija $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ takva da $(x\alpha)g = (xg)\alpha$, $\forall g \in G, x \in x_1 G$.

Teorem

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji bijekcija $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ takva da $(x\alpha)g = (xg)\alpha$, $\forall g \in G, x \in x_1 G$.

DOKAZ: Preslikavanje $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ definirano: $x\alpha = (x_1 g^{'})\alpha = x_2 \overline{g} g^{'}$, $\forall x \in x_1 G$ ima svojstva iz teorema. $\square$

Teorem

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji bijekcija $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ takva da $(x\alpha)g = (xg)\alpha$, $\forall g \in G, x \in x_1 G$.

DOKAZ: Preslikavanje $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ definirano: $x\alpha = (x_1 g^{'})\alpha = x_2 \overline{g} g^{'}$, $\forall x \in x_1 G$ ima svojstva iz teorema. □

Korolar

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji $\alpha \in C_{S(X)}(G)$ takav da $(x_1 G)\alpha = x_2 G$.

Teorem

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji bijekcija $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ takva da $(x\alpha)g = (xg)\alpha$, $\forall g \in G, x \in x_1 G$.

DOKAZ: Preslikavanje $\alpha : x_1 G \to x_2 G$ definirano: $x\alpha = (x_1 g^{'})\alpha = x_2 \overline{g} g^{'}$, $\forall x \in x_1 G$ ima svojstva iz teorema. $\square$

Korolar

Neka je X konačan skup, $G \leq S(X)$, $x_1, x_2 \in X$ i $G_{x_2}^{\overline{g}} = G_{x_1}$ za $\overline{g} \in G$. Tada postoji $\alpha \in C_{S(X)}(G)$ takav da $(x_1 G)\alpha = x_2 G$.

DOKAZ: Permutacija $\alpha : X \to X$ je definirana:

$$x\alpha = \begin{cases} (x_1 g^{'})\alpha = x_2 \overline{g} g^{'}, & x \in x_1 G \\ (x_2 \overline{g} g^{'})\alpha = x_1 g^{'}, & x \in x_2 G \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Teorem

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ blok dizajn, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ i matrica Δ $\dim(\Delta) = m \times n$, $\Delta = (\gamma_{ir})$ orbitna matrica tog dizajna za djelovanje grupe G. Neka je $g = (\alpha, \beta) \in S = S_m \times S_n$ sa sljedećim svojstvima:
1. ako $i\alpha = j$, tada je stabilizator G_{x_i} konjugat od G_{x_j}, gdje su $x_i, x_j \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_i = x_i G$ i $\mathcal{B}_j = x_j G$;
2. ako $r\beta = s$, tada je G_{P_r} konjugat od G_{P_s}, gdje su $P_r, P_s \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}_r = P_r G, \mathcal{P}_s = P_s G$.

Tada postoji permutacija $g^* \in C_S(G)$ takva da
$i\alpha = j \Leftrightarrow \mathcal{B}_i g^* = \mathcal{B}_j$ i
$r\beta = s \Leftrightarrow \mathcal{P}_r g^* = \mathcal{P}_s$.

Definicija

Neka je $A = (a_{i,j})$ $(m \times n)$ matrica i $g = (\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$. Matrica $B = Ag$ je $(m \times n)$ matrica $B = (b_{i,j})$ gdje su $b_{i\alpha, j\beta} = a_{i,j}$. Ako je $Ag = A$, g se naziva automorfizam matrice A. Svi automorfizmi matrice A čine punu grupu automorfizama od A, u oznaci $Aut(A)$.

Definicija

Neka je $\Delta = (\gamma_{ir})$ orbitna matrica (v, k, λ) dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ pod djelovanjem grupe $G \leq Aut(\mathcal{D})$ i Ω_i, ω_r, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq r \leq n$ su duljine G-orbita blokova $\mathcal{B}_i$ i točaka $\mathcal{P}_r$.

Preslikavanje $g = (\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$ naziva se automorfizam orbitne matrice Δ ukoliko vrijede sljedeći uvjeti:

1. g je automorfizam matrice Δ;
2. Ako ako $i\alpha = j$, tada je stabilizator G_{x_i} konjugat od G_{x_j}, gdje su $\mathcal{B}_i = x_i G$ i $\mathcal{B}_j = x_j G$;
3. Ako $r\beta = s$, tada je G_{P_r} konjugat od G_{P_s}, gdje su $\mathcal{P}_r = P_r G, \mathcal{P}_s = P_s G$.

Svi automorfizmi orbitne matrice Δ čine punu grupu automorfizama od Δ, u oznaci $Aut(\Delta)$.

Pri konstrukciji orbitnih matrica za eliminaciju se mogu upotrijebiti sve permutacije iz $S_m \times S_n$ koje zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, ali prilikom indeksiranja orbitne matrice Δ, mogu se upotrijebiti automorfizmi iz $Aut(\Delta)$.

Pri konstrukciji orbitnih matrica za eliminaciju se mogu upotrijebiti sve permutacije iz $S_m \times S_n$ koje zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, ali prilikom indeksiranja orbitne matrice Δ, mogu se upotrijebiti automorfizmi iz $Aut(\Delta)$.

Za eliminaciju koristimo sljedeće permutacije:
Korak 1: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu G tj. permutacije $(\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$ redaka i stupaca orbitnih matrica sa svojstvom:
$i\alpha = j \Rightarrow G_{x_i}$ je konjugat od G_{x_j}, $1 \leq i, j \leq m$;
$r\beta = s \Rightarrow G_{P_r}$ je konjugat od G_{P_s},$1 \leq r, s \leq n$,

Pri konstrukciji orbitnih matrica za eliminaciju se mogu upotrijebiti sve permutacije iz $S_m \times S_n$ koje zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, ali prilikom indeksiranja orbitne matrice Δ, mogu se upotrijebiti automorfizmi iz $Aut(\Delta)$.

Za eliminaciju koristimo sljedeće permutacije:
Korak 1: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu G tj. permutacije $(\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$ redaka i stupaca orbitnih matrica sa svojstvom:
$i\alpha = j \Rightarrow G_{x_i}$ je konjugat od G_{x_j}, $1 \leq i, j \leq m$;
$r\beta = s \Rightarrow G_{P_r}$ je konjugat od G_{P_s},$1 \leq r, s \leq n$,

Korak 2: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{s-1}$ koji normaliziraju grupu C_s.

Pri konstrukciji orbitnih matrica za eliminaciju se mogu upotrijebiti sve permutacije iz $S_m \times S_n$ koje zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema, ali prilikom indeksiranja orbitne matrice Δ, mogu se upotrijebiti automorfizmi iz $Aut(\Delta)$.

Za eliminaciju koristimo sljedeće permutacije:
Korak 1: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu G tj. permutacije $(\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$ redaka i stupaca orbitnih matrica sa svojstvom:
$i\alpha = j \Rightarrow G_{x_i}$ je konjugat od G_{x_j}, $1 \leq i, j \leq m$;
$r\beta = s \Rightarrow G_{P_r}$ je konjugat od G_{P_s}, $1 \leq r, s \leq n$,

Korak 2: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{s-1}$ koji normaliziraju grupu C_s.

$\vdots$

Korak s: Izomorfizme orbitnih matrica za grupu C_1 koji normaliziraju grupe $C_2, C_3, \ldots, C_s$;

Korak (s+1): Pretpostavit ćemo da generator grupe C_1 djeluje na C_1- orbitu duljine p kao permutacija $(0, 1, \ldots, p-1)$.

Korak (s+1): Pretpostavit ćemo da generator grupe C_1 djeluje na C_1- orbitu duljine p kao permutacija $(0, 1, \ldots, p-1)$.

Definiraju se permutacije α_l, $2 \leq l \leq |C_1| - 1$, $(|C_1|, l) = 1$, koje djeluju na svaku C_1-orbitu duljine p, kao što slijedi:

$$r_i \alpha_l = r_j, \quad j \equiv (i \cdot l) \pmod{p},$$

Korak (s+1): Pretpostavit ćemo da generator grupe C_1 djeluje na C_1- orbitu duljine p kao permutacija $(0, 1, \ldots, p-1)$.

Definiraju se permutacije α_l, $2 \leq l \leq |C_1| - 1$, $(|C_1|, l) = 1$, koje djeluju na svaku C_1-orbitu duljine p, kao što slijedi:

$$r_i \alpha_l = r_j, \quad j \equiv (i \cdot l) (\mathrm{mod}\ p),$$

i permutacije $\beta_{r,k}$, $1 \leq k \leq p-1$:

$$s_i \beta_{r,k} = \begin{cases} s_j, & j \equiv (i+k) (\mathrm{mod}\ p) \ \text{ ako } \ s \in rG \\ s_i, & \text{inače} \end{cases}$$

za neku C_1-orbitu r reda p.

Korak (s+1): Pretpostavit ćemo da generator grupe C_1 djeluje na C_1- orbitu duljine p kao permutacija $(0, 1, \ldots, p-1)$.

Definiraju se permutacije α_l, $2 \leq l \leq |C_1| - 1$, $(|C_1|, l) = 1$, koje djeluju na svaku C_1-orbitu duljine p, kao što slijedi:

$$r_i \alpha_l = r_j, \quad j \equiv (i \cdot l)(\mathrm{mod}\ p),$$

i permutacije $\beta_{r,k}$, $1 \leq k \leq p-1$:

$$s_i \beta_{r,k} = \begin{cases} s_j, & j \equiv (i+k)(\mathrm{mod}\ p) \ \text{ ako } \ s \in rG \\ s_i, & \text{inače} \end{cases}$$

za neku C_1-orbitu r reda p.

U ovom koraku za eliminaciju se mogu iskoristiti permutacije $\alpha_l, \beta_{r,k}$ i automorfizmi orbitnih matrica za djelovanje grupe C_1 koji normaliziraju grupe $C_2, \ldots, C_s$.

Konstrukcija simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna djelovanjem grupe automorfizama reda 55

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$.
Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Konstrukcija simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna djelovanjem grupe automorfizama reda 55

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Neka je ρ automorfizam simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna. Ako je $|\rho| = 11$, tada je broj fiksnih točaka za ρ, u oznaci $F(\rho) = 0$.

Konstrukcija simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna djelovanjem grupe automorfizama reda 55

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Neka je ρ automorfizam simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna. Ako je $|\rho| = 11$, tada je broj fiksnih točaka za ρ, u oznaci $F(\rho) = 0$.

Grupa Z_{55} djeluje na dizajn $\mathcal{D}$ s distribucijom orbita $(11, 55)$.

Konstrukcija simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna djelovanjem grupe automorfizama reda 55

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ simetričan (v, k, λ) dizajn i $G \leq Aut(\mathcal{D})$. Grupa G ima jednak broj G-orbita točaka i blokova.

Neka je ρ automorfizam simetričnog $(66, 26, 10)$ dizajna. Ako je $|\rho| = 11$, tada je broj fiksnih točaka za ρ, u oznaci $F(\rho) = 0$.

Grupa Z_{55} djeluje na dizajn $\mathcal{D}$ s distribucijom orbita $(11, 55)$.

Korak 1: Za simetričan $(66, 26, 10)$ dizajn i grupu automorfizama $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$ postoji samo jedna orbitna matrica, prikazana u Tablici 1.

Tablica 1 - OM orbitna matrica

OM	11	55
11	1	25
55	5	21

Korak 1: Za simetričan $(66, 26, 10)$ dizajn i grupu automorfizama $Z_{55} \cong Z_5 \times Z_{11}$ postoji samo jedna orbitna matrica, prikazana u Tablici 1.

Tablica 1 - OM orbitna matrica

OM	11	55
11	1	25
55	5	21

Teško je nastaviti s indeksiranjem orbitne matrice OM jer imamo $\binom{55}{25}$ mogućnosti za određivanje indeksnih skupova za poziciju $(1, 2)$ u OM.

Korak 2: Do na izomorfizam, jedina orbitna matrica za cikličku grupu Z_{11} je orbitna matrica OM1 iz Tablice 2.

Tablica 2 - OM1 orbitna matrica

OM1	11	11	11	11	11	11
11	1	5	5	5	5	5
11	5	5	5	5	5	1
11	5	5	5	5	1	5
11	5	5	5	1	5	5
11	5	5	1	5	5	5
11	5	1	5	5	5	5

Korak 2: Do na izomorfizam, jedina orbitna matrica za cikličku grupu Z_{11} je orbitna matrica OM1 iz Tablice 2.

Tablica 2 - OM1 orbitna matrica

OM1	11	11	11	11	11	11
11	1	5	5	5	5	5
11	5	5	5	5	5	1
11	5	5	5	5	1	5
11	5	5	5	1	5	5
11	5	5	1	5	5	5
11	5	1	5	5	5	5

Permutacija reda 5 djeluje na skup od šest Z_{11}-orbita točaka kao permutacija $(1)(2,6,5,4,3)$ i na skup Z_{11}-orbita blokova kao permutacija $(1)(2,3,4,5,6)$.

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i=2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i = 2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Stoga, grupe Z_{11} i Z_5 djeluju na skup točaka kako slijedi:
$Z_{11} - (I_0, I_1, \ldots, I_{10}),\ I = 1,2,\ldots,6$
$Z_5 - (1_i)(2_i, 6_i, 5_i, 4_i, 3_i),\ i = 0,1,\ldots,10.$

Korak 3: Nastavljamo s indeksiranjem OM1. Znajući djelovanje permutacije reda 5 na Z_{11}-orbite točaka i blokova, jedino trebamo odrediti indeksne skupove za pozicije $(1,1),(1,2),(2,1)$ i $(2,i), i = 2,3,4,5,6$. Indeksni skupovi za ostale pozicije orbitne matrice mogu se dobiti djelovanjem elementima grupe Z_5.

Stoga, grupe Z_{11} i Z_5 djeluju na skup točaka kako slijedi:
$Z_{11} - (I_0, I_1, \ldots, I_{10}),\ I = 1,2,\ldots,6$
$Z_5 - (1_i)(2_i, 6_i, 5_i, 4_i, 3_i),\ i = 0,1,\ldots,10.$

Indeksni skupovi koji se mogu pojaviti u dizajnima su: $0 = \{0\}, \ldots, 10 = \{10\}, 11 = \{0,1,2,3,4\}, \ldots, 472 = \{6,7,8,9,10\}$.

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:
$r_i\alpha_l = r_j$, $j \equiv (i \cdot l) \pmod{11}$, $r = 1, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:
$r_i \alpha_l = r_j$, $j \equiv (i \cdot l) (\mathrm{mod}\ 11)$, $r = 1, \dots 6$, $i = 0, 1, \dots, 10$
$1_i \beta_{1,k} = 1_j$, $j \equiv (i + k) (\mathrm{mod}\ 11)$, $i = 0, 1, \dots, 10$

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:
$r_i\alpha_l = r_j$, $j \equiv (i \cdot l) (\mathrm{mod}\ 11)$, $r = 1, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$
$1_i\beta_{1,k} = 1_j$, $j \equiv (i + k) (\mathrm{mod}\ 11)$, $i = 0, 1, \ldots, 10$
$r_i\beta_{1,k} = r_i$, $r = 2, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:

$r_i\alpha_l = r_j$, $j \equiv (i \cdot l) \pmod{11}$, $r = 1, \dots 6$, $i = 0, 1, \dots, 10$

$1_i\beta_{1,k} = 1_j$, $j \equiv (i + k) \pmod{11}$, $i = 0, 1, \dots, 10$

$r_i\beta_{1,k} = r_i$, $r = 2, \dots 6$, $i = 0, 1, \dots, 10$

$1_i\beta_{2,k} = 1_i$, $i = 0, 1, \dots, 10$

Eliminacija izomorfnih simetričnih dizajna $(66, 26, 10)$ pod djelovanjem grupe Z_{55} prilikom indeksiranja

Za eliminaciju izomorfnih dizajna kod indeksiranja, koriste se automorfizmi profinjene orbitne matrice OM1 za djelovanje grupe Z_{11} i permutacije $\alpha_l, \beta_{1,k}, \beta_{2,k} \in N_S(G)$, $2 \leq l \leq 10$, $1 \leq k \leq 10$, koje djeluju na točkama dizajna kako slijedi:

$r_i\alpha_l = r_j$, $j \equiv (i \cdot l) \pmod{11}$, $r = 1, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

$1_i\beta_{1,k} = 1_j$, $j \equiv (i + k) \pmod{11}$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

$r_i\beta_{1,k} = r_i$, $r = 2, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

$1_i\beta_{2,k} = 1_i$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

$r_i\beta_{2,k} = r_j$, $j \equiv (i + k) \pmod{11}$, $r = 2, \ldots 6$, $i = 0, 1, \ldots, 10$

Tim algoritmom konstruiran je, kao što je već i navedeno, do na izomorfizam jedan dizajn zapisan indeksnim skupovima:

0	280	280	280	280	280
20	20	450	450	20	5
20	450	450	20	5	20
20	450	20	5	20	450
20	20	5	20	450	450
20	5	20	450	450	20