Neuloživi kvazi-rezidualni dizajni

Nina Mavrović

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

17.12.2010.

Literatura

Mohan S. SHRIKHANDE and Tariq A. ALRAQAD:

- ***Recent results on families of symmetric designs and non-embeddable quasi-residual designs***

Sadržaj

1. Uvod - kvazi-rezidualni dizajni
2. Uloživost
3. Uvjeti neuloživosti
4. Tehnike konstrukcije
5. Hadamardovi i Menonovi dizajni

Rezidualni dizajn simetričnog dizajna

Definicija 1.1

Neka je $S = (X, \mathcal{B})$ simetrični (v, k, λ)-dizajn i $B \in \mathcal{B}$.

- Rezidualni dizajn od S je dizajn $S^B = (X \setminus B, \{A \setminus B : A \in \mathcal{B}, A \neq B\})$ dobiven iz S uklanjanjem svih točaka iz B.
- S^B ima parametre $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$.

Derivirani dizajn simetričnog dizajna

Definicija 1.2

Neka je $S = (X, \mathcal{B})$ simetrični (v, k, λ)-dizajn i $B \in \mathcal{B}$.

- Derivirani dizajn od S je dizajn $S_B = (B, \{A \cap B : A \in \mathcal{B}, A \neq B\})$ dobiven iz S uklanjanjem bloka B i svih točaka izvan njega.

Derivirani dizajn simetričnog dizajna

Definicija 1.2

Neka je $S = (X, \mathcal{B})$ simetrični (v, k, λ)-dizajn i $B \in \mathcal{B}$.

- Derivirani dizajn od S je dizajn $S_B = (B, \{A \cap B : A \in \mathcal{B}, A \neq B\})$ dobiven iz S uklanjanjem bloka B i svih točaka izvan njega.
- S_B ima parametre $(k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1)$, uz uvjet $\lambda \geq 2$.

Rezidualni i derivirani dizajni simetričnog dizajna

- S simetričan dizajn, B blok od S
- P matrica incidencije od S čiji zadnji stupac odgovara bloku B
- M matrica incidencije od S^B, N matrica incidencije od S_B

Rezidualni i derivirani dizajni simetričnog dizajna

- S simetričan dizajn, B blok od S
- P matrica incidencije od S čiji zadnji stupac odgovara bloku B
- M matrica incidencije od S^B, N matrica incidencije od S_B

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} M & 0 \\ N & j \end{bmatrix}$$

Primjer 1

Neka je S simetričan $(11, 5, 2)$-dizajn i $B = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ njegov blok.

Primjer 1

Neka je S simetričan $(11, 5, 2)$-dizajn i $B = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ njegov blok.

- S^B je $2-(6, 3, 2)$ dizajn
- S_B je $2-(5, 2, 1)$ dizajn
- svaki od preostalih 10 blokova particioniran je u 2 dijela, koji formiraju S_B na skupu točaka iz B te S^B na $X \setminus B$

Primjer 1

Neka je S simetričan $(11, 5, 2)$-dizajn i $B = \{1, 3, 4, 5, 9\}$ njegov blok.

- S^B je $2 - (6, 3, 2)$ dizajn
- S_B je $2 - (5, 2, 1)$ dizajn
- svaki od preostalih 10 blokova particioniran je u 2 dijela, koji formiraju S_B na skupu točaka iz B te S^B na $X \setminus B$

B	1	3	4	5	9
B_1	4	5	2	6	10
B_2	3	5	6	7	0
B_3	1	4	6	7	8
B_4	5	9	2	7	8
B_5	3	9	6	8	10
B_6	4	9	0	7	10
B_7	1	5	0	8	10
B_8	1	9	2	6	0
B_9	1	3	2	7	10
B_{10}	3	4	0	2	8

Primjer 1

Neka je S simetričan $(11,5,2)$-dizajn i $B=\{1,3,4,5,9\}$ njegov blok.

$$\left[\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

Rezidualni i derivirani dizajn simetričnog dizajna

Napomena

- Rezidualni i derivirani dizajn simetričnog dizajna ne određuju jednoznačno taj simetrični dizajn.
- Npr. postoje simetrični $(25, 9, 3)$-dizajni D i E te blokovi A od D i B od E takvi da:

$$D^A \simeq E^B, \ D_A \simeq E_B, \ \text{ ali ne vrijedi } D \simeq E.$$

Kvazi-rezidualan i kvazi-deriviran dizajn

Definicija 1.3

- Kvazi-rezidualan dizajn je (v, b, r, k, λ) dizajn za kojega je $r = k + \lambda$.
- Kvazi-deriviran dizajn je (v, b, r, k, λ) dizajn za kojega je $k = \lambda + 1$.

Uloživost

- Kada je kvazi-rezidualan (kvazi-deriviran) dizajn ujedno i rezidualan (deriviran)?

Uloživost

- Kada je kvazi-rezidualan (kvazi-deriviran) dizajn ujedno i rezidualan (deriviran)?

Definicija 2.1

Ako je ***kvazi-rezidualan(deriviran)*** dizajn ***ujedno i rezidualan (deriviran) dizajn simetričnog dizajna***, kažemo da je uloživ.

Inače kažemo da je neuloživ.

Uloživost

Definicija 2.2.

Komplementarni dizajn D' dizajna D dobije se zamjenom svih blokova iz D njihovim komplementima.

Uloživost

Definicija 2.2.

Komplementarni dizajn D' dizajna D dobije se zamjenom svih blokova iz D njihovim komplementima.

- Komplementarni dizajn kvazi-rezidualnog dizajna je kvazi-derivirani dizajn i obratno.

Uloživost

Definicija 2.2.

Komplementarni dizajn D' dizajna D dobije se zamjenom svih blokova iz D njihovim komplementima.

- Komplementarni dizajn kvazi-rezidualnog dizajna je kvazi-derivirani dizajn i obratno.
- Kvazi-rezidualan(deriviran) dizajn je uloživ $\Leftrightarrow$ je njegov komplementarni dizajn uloživ.

Primjer 2. Bhattacharya-in dizajn (1944)

- (16,24,9,6,3) dizajn sa skupom točaka $X = \{1, 2, ..., 16\}$ i blokovima:

$B_1 = \{1, 2, 7, 8, 14, 15\}$	$B_9 = \{3, 5, 7, 8, 11, 13\}$	$B_{17} = \{2, 3, 8, 9, 13, 16\}$
$B_2 = \{3, 5, 8, 9, 12, 14\}$	$B_{10} = \{1, 6, 7, 9, 12, 13\}$	$B_{18} = \{2, 5, 7, 10, 13, 15\}$
$B_3 = \{3, 4, 7, 10, 12, 16\}$	$B_{11} = \{3, 4, 6, 13, 14, 15\}$	$B_{19} = \{4, 5, 7, 9, 12, 15\}$
$B_4 = \{2, 4, 9, 10, 11, 13\}$	$B_{12} = \{3, 6, 7, 10, 11, 14\}$	$B_{20} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B_5 = \{1, 4, 7, 8, 11, 16\}$	$B_{13} = \{2, 4, 8, 10, 12, 14\}$	$B_{21} = \{5, 6, 8, 10, 15, 16\}$
$B_6 = \{1, 6, 8, 10, 12, 13\}$	$B_{14} = \{1, 2, 3, 12, 13, 15\}$	$B_{22} = \{2, 6, 7, 9, 14, 16\}$
$B_7 = \{1, 4, 5, 13, 14, 15\}$	$B_{15} = \{2, 5, 6, 11, 12, 16\}$	$B_{23} = \{1, 3, 9, 10, 15, 16\}$
$B_8 = \{4, 6, 8, 9, 11, 15\}$	$B_{16} = \{1, 5, 9, 10, 11, 14\}$	$B_{24} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

- $|B_6 \cap B_{10}| = 4 \Rightarrow$ ne može se uložiti u sim. $(25, 9, 3)$-dizajn

Uloživost kvazi-rezidualnih dizajna

Neka je D kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn. Ako je:

- $\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad D$ je rezidualan (Hall,Connor; 1954).

Uloživost kvazi-rezidualnih dizajna

Neka je D kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn. Ako je:

- $\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad D$ je rezidualan (Hall,Connor; 1954).

Teorem 2.3

Kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn sa $\lambda \leq 2$ je uloživ u jedinstveni simetrični $(v+k+\lambda, k+\lambda, \lambda)$ dizajn.

Uloživost kvazi-rezidualnih dizajna za $\lambda \geq 3$

Teorem 2.4 (Bose, S.Shrikhande, Singhi; 1976)

Neka je $\lambda \geq 3$ i $g(\lambda)$ definiran sa:

$$g(\lambda) = \begin{cases} 76, & \lambda = 3 \\ \frac{1}{2}(\lambda - 1)(\lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda + 2), & 4 \leq \lambda \leq 9 \\ \frac{(\lambda-1)^2(\lambda-2)}{2}[1 + (\lambda - 1)(\lambda - 2)] - \lambda + 1 + & \\ + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}\sqrt{(\lambda - 1)^2[1 + (\lambda - 1)(\lambda - 2)]^2 + 4(\lambda - 1)} & \lambda > 9 \end{cases}$$

Tada je svaki kvazi-rezidualan $2-(v, k, \lambda)$ dizajn sa $\lambda \geq 3$ i $k > g(\lambda)$ uloživ u jedinstveni simetrični $(v + k + \lambda, k + \lambda, \lambda)$ dizajn.

Uloživost kvazi-rezidualnih dizajna za $\lambda \geq 3$

Teorem 2.5 (Neumaier, 1982)

Kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn je uloživ ako je ili:

- $\lambda = 3$ i $k > 76$;
- ili $\lambda \neq 3$ i $k > \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2)$.

Uloživost kvazi-rezidualnih dizajna za $\lambda \geq 3$

Teorem 2.5 (Neumaier, 1982)

Kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn je uloživ ako je ili:

- $\lambda = 3$ i $k > 76$;
- ili $\lambda \neq 3$ i $k > \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2)$.

Teorem 2.6. (Metsch, 1995)

Kvazi-rezidualan $2-(v,k,\lambda)$ dizajn je uloživ ako je:

$$k > \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\lambda + \lambda + 5\right)(\lambda - 1)\lambda^2.$$

Uvjeti neuloživosti

Razlozi neuloživosti kvazi-rezidualnog dizajna:

1. trivijalan tip uvjeta;
2. uvjeti koji ovise o presjecima blokova;
   - *m* - blokovni uvjet neuloživosti
3. uvjeti nejednakosnog tipa i uvjeti djeljivosti;
4. uvjeti dobiveni korištenjem kodova i grafova.

1) Trivijalan tip uvjeta neuloživosti

- kvazi-rezidualan dizajn je neuloživ ako pridruženi simetrični dizajn ne postoji
- to se dokazuje $B-R-C$ teoremom

1) Trivijalan tip uvjeta neuloživosti

- kvazi-rezidualan dizajn je neuloživ ako pridruženi simetrični dizajn ne postoji
- to se dokazuje $B-R-C$ teoremom

Teorem 3.1.

Neka su v, k, λ cijeli brojevi takvi da je $\lambda(v-1) = k(k-1)$, za koje postoji simetrični (v, k, λ) dizajn. Tada ako je:

1. v paran $\Rightarrow k-\lambda$ kvadrat;
2. v neparan $\Rightarrow$ jednadžba $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$ ima za rješenje $x, y, z \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki 0.

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

- pokaže se da *kvazi-rezidualan dizajn* sadrži kolekciju blokova sa specifičnim veličinama presjeka po dva bloka, koje sprječavaju da dizajn bude uloživ
- **Pr.:** Dizajn Bhattacharya-inog tipa nije uloživ jer ima par blokova koji se sijeku u više od λ točaka

2) Primjer: $2-(25,10,6)$ dizajn, $X=\{1,...,25\}$, $\mathcal{B}=\{B_1,...,B_{40}\}$

$B_1=\{1,3,4,7,10,13,14,18,19,21\}$
$B_2=\{2,4,5,8,6,14,15,19,20,22\}$
$B_3=\{3,5,1,9,7,15,11,20,16,23\}$
$B_4=\{4,1,2,10,8,11,16,17,24\}$
$B_5=\{5,2,3,6,9,12,13,17,18,25\}$
$B_6=\{6,7,10,12,15,18,19,22,25,1\}$
$B_7=\{7,8,6,13,11,19,20,23,21,2\}$
$B_8=\{8,9,7,14,12,20,16,24,22,3\}$
$B_9=\{9,10,8,15,13,16,17,25,23,4\}$
$B_{10}=\{10,6,9,11,14,17,18,21,24,5\}$
$B_{11}=\{21,23,24,3,4,12,15,17,20,6\}$
$B_{12}=\{22,24,25,4,5,13,11,18,16,7\}$
$\vdots$
$B_{19}=\{20,16,17,18,1,2,6,7,25,23\}$
$B_{20}=\{16,17,18,19,2,3,7,8,21,24\}$

$B_{21}=\{1,3,4,6,8,9,21,22,25,11\}$
$B_{22}=\{2,4,5,7,9,10,22,23,21,12\}$
$B_{23}=\{3,5,1,8,10,6,23,24,22,13\}$
$B_{24}=\{4,1,2,9,6,7,24,25,23,14\}$
$B_{25}=\{5,2,3,10,7,8,25,21,24,15\}$
$B_{26}=\{11,13,14,3,4,6,7,10,17,20\}$
$B_{27}=\{12,14,15,4,5,7,6,8,18,16\}$
$B_{28}=\{13,15,11,5,1,8,9,7,19,17\}$
$B_{29}=\{14,11,12,1,2,9,10,8,20,18\}$
$B_{30}=\{15,12,13,2,3,10,6,9,16,19\}$
$\vdots$
$B_{37}=\{12,14,15,4,5,7,6,8,18,16\}$
$B_{38}=\{13,14,12,25,21,3,5,1,20,16\}$
$B_{39}=\{14,15,13,21,22,4,1,2,16,17\}$
$B_{40}=\{15,11,14,22,23,5,2,3,17,18\}$

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Definicija 3.2 (m - blokovni uvjet neuloživosti)

Neka je $\mathcal{P}_m$ skup svih polinoma

$$f = a + a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij},\ a_0, a_{ij} \in \mathbb{Z},\ a \in \{0,1\}.$$

Neka je $F \subseteq \mathcal{P}_m$.

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Definicija 3.2 (m - blokovni uvjet neuloživosti)

Neka je $\mathcal{P}_m$ skup svih polinoma

$$f = a + a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}, \; a_0, a_{ij} \in \mathbb{Z}, \; a \in \{0, 1\}.$$

Neka je $F \subseteq \mathcal{P}_m$. Kažemo da $2 - (v, k, \lambda)$ dizajn D zadovoljava nejednakost $F > 0$ ako D ima m različitih blokova $B_1, ..., B_m$ t.d. ako je $x_0 = \lambda$ i $x_{ij} = |B_i \cap B_j|$ $(i, j = 1, ..., m)$ tada je vrijednost svakog polinoma $f \in F$ pozitivna.

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Definicija 3.2 (m - blokovni uvjet neuloživosti)

Neka je $\mathcal{P}_m$ skup svih polinoma

$$f = a + a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij},\ a_0, a_{ij} \in \mathbb{Z},\ a \in \{0, 1\}.$$

Neka je $F \subseteq \mathcal{P}_m$. Kažemo da $2-(v,k,\lambda)$ dizajn D zadovoljava nejednakost $F > 0$ ako D ima m različitih blokova $B_1, ..., B_m$ t.d. ako je $x_0 = \lambda$ i $x_{ij} = |B_i \cap B_j|$ $(i, j = 1, ..., m)$ tada je vrijednost svakog polinoma $f \in F$ pozitivna.

Skup F se zove m blokovni uvjet neuloživosti ako je svaki kvazi-rezidualni dizajn koji zadovoljava $F > 0$ neuloživ.

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Primjer

- dizajn Bhattacharya-inog tipa zadovoljava 2-blokovni uvjet neuloživosti za $F = \{-x_0 + x_{12}\}$

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Primjer

- dizajn Bhattacharya-inog tipa zadovoljava 2-blokovni uvjet neuloživosti za $F = \{-x_0 + x_{12}\}$

Teorem 3.3

Skup $F = \{-x_0 - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{23}\}$ je 3 - blokovni uvjet neuloživosti.

2) Primjer 3.

- 2-(12,6,5) dizajn D, $X = \{1, ..., 12\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_{22}\}$

$B_1 = \{3, 5, 6, 8, 10, 11\}$ $B_2 = \{1, 2, 6, 8, 10, 11\}$ $B_3 = \{2, 3, 6, 8, 11, 12\}$
$B_4 = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ $B_5 = \{4, 5, 6, 7, 8, 12\}$ $B_6 = \{1, 2, 4, 7, 8, 10\}$
$B_7 = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ $B_8 = \{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ $B_9 = \{3, 4, 5, 7, 10, 11\}$
$B_{10} = \{1, 3, 4, 9, 10, 11\}$ $B_{11} = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$ $B_{12} = \{1, 3, 5, 8, 9, 12\}$
$B_{13} = \{2, 4, 6, 9, 10, 12\}$ $B_{14} = \{1, 3, 6, 7, 10, 12\}$ $B_{15} = \{2, 4, 5, 8, 9, 11\}$
$B_{16} = \{1, 4, 5, 8, 10, 12\}$ $B_{17} = \{1, 4, 6, 9, 11, 12\}$ $B_{18} = \{2, 3, 5, 9, 10, 12\}$
$B_{19} = \{1, 5, 6, 7, 9, 11\}$ $B_{20} = \{2, 3, 4, 7, 11, 12\}$ $B_{21} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$B_{22} = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2) Primjer 3.

- 2-(12,6,5) dizajn D, $X = \{1, ..., 12\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_{22}\}$

$B_1 = \{3,5,6,8,10,11\}$ $\quad B_2 = \{1,2,6,8,10,11\}$ $\quad B_3 = \{2,3,6,8,11,12\}$
$B_4 = \{1,2,3,7,8,9\}$ $\quad B_5 = \{4,5,6,7,8,12\}$ $\quad B_6 = \{1,2,4,7,8,10\}$
$B_7 = \{1,2,5,7,11,12\}$ $\quad B_8 = \{3,4,6,7,8,9\}$ $\quad B_9 = \{3,4,5,7,10,11\}$
$B_{10} = \{1,3,4,9,10,11\}$ $\quad B_{11} = \{2,5,6,7,9,10\}$ $\quad B_{12} = \{1,3,5,8,9,12\}$
$B_{13} = \{2,4,6,9,10,12\}$ $\quad B_{14} = \{1,3,6,7,10,12\}$ $\quad B_{15} = \{2,4,5,8,9,11\}$
$B_{16} = \{1,4,5,8,10,12\}$ $\quad B_{17} = \{1,4,6,9,11,12\}$ $\quad B_{18} = \{2,3,5,9,10,12\}$
$B_{19} = \{1,5,6,7,9,11\}$ $\quad B_{20} = \{2,3,4,7,11,12\}$ $\quad B_{21} = \{1,2,3,4,5,6\}$
$B_{22} = \{7,8,9,10,11,12\}$

- B_1, B_2 i B_3 zadovoljavaju nejednakost iz teorema 3.3.
  $\Rightarrow$ D je neuloživ

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Teorem 3.4

Skup $F = \{x_{12} - x_{13} - x_{23}\}$ je 3 - blokovni uvjet neuloživosti.

2) Uvjeti koji ovise o presjecima blokova

Teorem 3.4

Skup $F = \{x_{12} - x_{13} - x_{23}\}$ je 3 - blokovni uvjet neuloživosti.

Primjer 4. 2-(21,9,6) dizajn, $X = \{1, ..., 21\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_{35}\}$

$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 14, 15\}$ $\quad$ $B_2 = \{1, 2, 5, 9, 11, 13, 14, 16, 18\}$

$B_3 = \{3, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 19, 20\}$ $\quad$ $B_4 = \{1, 2, 3, 4, 8, 13, 19, 20, 21\}$

$B_5 = \{1, 2, 4, 7, 10, 12, 13, 15, 17\}$ $\quad$ $B_6 = \{1, 2, 3, 9, 10, 12, 18, 19, 20\}$

$B_7 = \{1, 3, 6, 7, 11, 12, 13, 18, 21\}$ $\quad$ $B_8 = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 19\}$

$B_9 = \{1, 6, 7, 9, 10, 14, 17, 20, 21\}$ $\quad$ $B_{10} = \{1, 4, 5, 6, 8, 16, 17, 18, 20\}$

...

Uvjeti neuloživosti

Napomena - neuloživost kvazi-rezidualnog dizajna

- za $k \leq \frac{v}{2}$ većinom se koriste uvjeti temeljeni na presjecima blokova
- za $k > \frac{v}{2}$ se koriste $B-R-C$ teorem, kodovi i grafovi, te uvjeti nejednakosnog tipa i djeljivosti

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

- van Trung je koristio **grupe automorfizama** za konstrukciju $2-(25,10,6)$ i $2-(36,16,12)$ kvazi-rezidualnih dizajna;
- Tonchev je koristio **kodove i grafove**
  - kreće se od matrice incidencije A kvazi-rezidualnog dizajna
  - zatim se izbrišu neki redovi od A te ih se popunjava korištenjem kodova i grafova
  - učinkovita metoda za male parametre

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

- neke metode konstrukcije koriste i **rješive dizajne**

Definicija 4.1.

Neka je $D = (X, \mathcal{B})$ $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Paralelna klasa u D je podskup disjunktnih blokova iz $\mathcal{B}$ čija unija je X. Kažemo da je dizajn D rješiv ako se $\mathcal{B}$ može particionirati u r paralelnih klasa.

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

- neke metode konstrukcije koriste i **rješive dizajne**

Definicija 4.1.

Neka je $D = (X, \mathcal{B})$ $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Paralelna klasa u D je podskup disjunktnih blokova iz $\mathcal{B}$ čija unija je X. Kažemo da je dizajn D rješiv ako se $\mathcal{B}$ može particionirati u r paralelnih klasa.

- Svaka paralelna klasa sadrži v/k blokova.

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

- neke metode konstrukcije koriste i **rješive dizajne**

Definicija 4.1.

Neka je $D = (X, \mathcal{B})$ $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Paralelna klasa u D je podskup disjunktnih blokova iz $\mathcal{B}$ čija unija je X. Kažemo da je dizajn D rješiv ako se $\mathcal{B}$ može particionirati u r paralelnih klasa.

- Svaka paralelna klasa sadrži v/k blokova.
- Zato D može imati paralelnu klasu samo ako je $v \equiv 0 (\mathrm{mod}\ k)$.

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

Teorem 4.2. (van Trung, 1990)

Ako postoji rješivi (v, b, r, k, λ) dizajn R i ne nužno izomorfni $(v_1, b_1, r_1, k_1, \lambda_1)$ dizajni $D_1, ..., D_r$, gdje je $v_1 = \frac{v}{k}$, tada postoji 2-dizajn D s parametrima $(v, rb_1, rr_1, kk_1, r_1\lambda + (r-\lambda)\lambda_1)$.

Nadalje, ako je $\dfrac{r-\lambda}{k} = \dfrac{k_1}{r_1 - \lambda_1}$, tada je D kvazi-rezidualan.

Tehnike konstrukcije kvazi-rezidualnih dizajna

Ionin i Mackenzie-Fleming su uveli metodu koja koristi *BGW* matrice i *GH* matrice.

Teorem 4.3. (Ionin, 2001)

Neka je r neparna prim potencija i D $(r+1, 2r, r, \frac{r+1}{2}, \frac{r-1}{2})$ dizajn koji zadovoljava m-blokovni uvjet neuloživosti.
Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji kvazi-rezidualan dizajn koji zadovoljava m-blokovni uvjet neuloživosti s parametrima

$$\left(\frac{(r+1)(r^n-1)}{r-1}, \frac{2r(r^n-1)}{r-1}, r^n, \frac{(r+1)r^{n-1}}{2}, \frac{(r-1)r^{n-1}}{2}\right).$$

Kvazi-rezidualni Hadamardovi dizajni

- Primjer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Hadamardova matrica reda 8}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{matrica incid. sim.} \\ \text{(7,3,1)-dizajna}}}$$

Kvazi-rezidualni Hadamardovi dizajni

Teorem 5.1.

Neka je $m > 1$. Hadamardova matrica reda $4m$ postoji $\Leftrightarrow$ postoji simetričan $(4m-1, 2m-1, m-1)$-dizajn.

Kvazi-rezidualni Hadamardovi dizajni

Teorem 5.1.

Neka je $m > 1$. Hadamardova matrica reda $4m$ postoji $\Leftrightarrow$ postoji simetričan $(4m-1, 2m-1, m-1)$-dizajn.

Definicija 5.2.

- Neka je $k > 1$. Simetrični $(4k-1, 2k-1, k-1)$-dizajn se naziva Hadamardov dizajn.
- Kvazi-rezidualan dizajn Hadamardovog dizajna naziva se kvazi-rezidualan Hadamardov dizajn.
  - On ima parametre: $2-(2k, k, k-1)$.

Uloživost kvazi-rezidualnih Hadamardovih dizajna

- $2-(2k,k,k-1)$ dizajni za $k \leq 5$ su uloživi (van Lint, van Tilborg, Wiekema; 1977).
- Za $k > 5$ konstruirani su neki neuloživi kvazi-rezidualni Had. dizajni s parametrima:
  - $2-(12,6,5)$, $2-(16,8,7)$, $2-(20,10,9)$ (Mackenzie-Fleming);
  - $2-(14,7,6)$, $2-(18,9,8)$ (Alraqad).
  - Svi oni zadovoljavaju 3-blokovni uvjet iz teorema 3.2.

Kvazi-rezidualni Hadamardovi dizajni

Alraqad i Shrikhande su 2009. koristili *GH* matrice za konstrukciju nekih beskonačnih familija neuloživih kvazi-rezidualnih Hadamardovih dizajna.

Kvazi-rezidualni Hadamardovi dizajni

Alraqad i Shrikhande su 2009. koristili *GH* matrice za konstrukciju nekih beskonačnih familija neuloživih kvazi-rezidualnih Hadamardovih dizajna.

Teorem 5.3.

Neka je D kvazi-rezidualan 2-$(2k, k, k-1)$ dizajn koji zadovoljava 3-blokovni uvjet neuloživosti $F = \{-x_0 - x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{23}\} > 0$. Ako postoji Hadamardova matrica reda n, tada postoji kvazi-rezidualan $2-(2nk, nk, nk-1)$ dizajn E koji zadovoljava isti uvjet neuloživosti.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Definicija 5.4.

- Menonov dizajn reda h^2 je simetrični $(4h^2, 2h^2 - h, h^2 - h)$-dizajn.
- Kvazi-rezidualan/deriviran dizajn Menonovog dizajna reda h^2 naziva se kvazi-rezidualan/deriviran Menonov dizajn reda h^2.
    - Prvi ima parametre $2 - (2h^2 + h, h^2, h^2 - h)$.
    - Drugi ima parametre $2 - (2h^2 - h, h^2 - h, h^2 - h - 1)$.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Definicija 5.5.

Hadamardova matrica H je regularna ako ima konstantnu sumu redaka.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Definicija 5.5.

Hadamardova matrica H je regularna ako ima konstantnu sumu redaka.

Teorem 5.6. (Alraqad, Shrikhande; 2008)

Neka su h i n pozitivni cijeli brojevi i H regularna Hadamardova matrica reda $4h^2$. Pretpostavimo da postoje kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni D i E reda n^2.

Tada postoje kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni D_1 i E_1 reda $(2nh)^2$.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Teorem 5.7. (Alraqad, Shrikhande; 2008)

Neka su h i n pozitivni cijeli brojevi, te D, E, D_1, E_1 i H kao u teoremu 5.6. Pretpostavimo da D zadovoljava $F > 0$ i da komplementarni dizajn od E zadovoljava $F \geq 0$.Tada D_1 i komplementarni dizajn od E_1 zadovoljavaju $F > 0$.

Primjer 5

- E 2-(15,6,5) dizajn, $X = \{1, ..., 15\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_{35}\}$

$B_1 = \{2,4,6,9,12,15\}$ $B_2 = \{2,4,6,8,11,14\}$ $B_3 = \{1,3,5,7,10,13\}$
$B_4 = \{1,3,5,8,11,14\}$ $B_5 = \{1,3,5,9,12,15\}$ $B_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$
...

$B_1^C = \{1,3,5,7,8,10,11,13,14\}$ $B_2^C = \{1,3,5,7,9,10,12,13,15\}$
$B_3^C = \{2,4,6,8,9,11,12,14,15\}$

- $|B_1^C \cap B_2^C| - |B_1^C \cap B_3^C| - |B_2^C \cap B_3^C| = 6 - 3 - 3 = 0$
- $\Rightarrow E'$ zadovoljava $F \geq 0$ za $F = \{x_{12} - x_{13} - x_{23}\}$

Primjer 4.

- D 2-(21,9,6) dizajn, $X = \{1, ..., 21\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_{35}\}$

$B_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 11, 14, 15\}$ $B_2 = \{1, 2, 5, 9, 11, 13, 14, 16, 18\}$
$B_3 = \{3, 7, 8, 11, 12, 16, 17, 19, 20\}$ $B_4 = \{1, 2, 3, 4, 8, 13, 19, 20, 21\}$
$B_5 = \{1, 2, 4, 7, 10, 12, 13, 15, 17\}$ $B_6 = \{1, 2, 3, 9, 10, 12, 18, 19, 20\}$
$B_7 = \{1, 3, 6, 7, 11, 12, 13, 18, 21\}$ $B_8 = \{1, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 13, 19\}$
$B_9 = \{1, 6, 7, 9, 10, 14, 17, 20, 21\}$ $B_{10} = \{1, 4, 5, 6, 8, 16, 17, 18, 20\}$
...

- D zadovoljava $F = \{x_{12} - x_{13} - x_{23}\} > 0$

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Primjenom teorema 5.6. i 5.7., te korištenjem dizajna iz primjera 4 i 5 dobivamo sljedeći korolar.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Primjenom teorema 5.6. i 5.7., te korištenjem dizajna iz primjera 4 i 5 dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 5.8.

Neka je h pozitivan cijeli broj. Ako postoji regularna Hadamardova matrica reda $4h^2$, tada postoje neuloživi kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni sa parametrima $2-(72h^2+6h, 36h^2, 36h^2-6h)$ i $2-(72h^2-6h, 36h^2-6h, 36h^2-6h-1)$ redom.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Uz druge početne dizajne D i E Shrikhande i Alraqad su dobili i sljedeći korolar.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Uz druge početne dizajne D i E Shrikhande i Alraqad su dobili i sljedeći korolar.

Korolar 5.9.

Neka je h pozitivan cijeli broj. Ako postoji regularna Hadamardova matrica reda $4h^2$, tada postoje neuloživi kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni sa parametrima $2-(128h^2+8h, 64h^2, 64h^2-8h)$ i $2-(128h^2-8h, 64h^2-8h, 64h^2-8h-1)$ redom.

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Teorem 5.10.

Postoje neuloživi kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni redova $36h^2$ i $64h^2$, gdje je:

Kvazi-rezidualni Menonovi dizajni

Teorem 5.10.

Postoje neuloživi kvazi-rezidualni i kvazi-derivirani Menonovi dizajni redova $36h^2$ i $64h^2$, gdje je:

1. $h = 2 \cdot 3^m$, m poz. cijeli broj;
2. $2 \cdot t^2$, t neparan cijeli broj;
3. $h - 1$ i $h + 1$ prim potencije;
4. $h = 4qm$, $q = 8m^2 - 1$ prim potencija, te postoji Hadam. matrica reda $4m$;
5. h poz. cijeli broj i h ili $2h$ ili $3h$ ili $6h$ kvadrat.