Nepristrane Hadamardove matrice i baze

Nina Mavrović

(18.4.2011.)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

Literatura

Hadi Kharaghani:

"Unbiased Hadamard matrices and bases"

Sadržaj

Sadržaj

Definicija 1.1

Realna Hadamardova matrica je matrica H reda n sa elementima iz $\{\pm 1\}$ za koju je $HH^T = nI$.

Definicija 1.1

Realna Hadamardova matrica je matrica H reda n sa elementima iz $\{\pm 1\}$ za koju je $HH^T = nI$.

Primjer 1.

$$H_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Definicija 1.2

Kompleksna Hadamardova matrica je matrica H reda n s elementima iz $\{\pm 1, \pm i\}$ za koju je $HH^* = nI$.

Definicija 1.2

Kompleksna Hadamardova matrica je matrica H reda n s elementima iz $\{\pm 1, \pm i\}$ za koju je $HH^* = nI$.

Primjer 2.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice

Definicija 1.3

Za dvije **kompleksne Hadamardove matrice** H i K reda $2n$ kažemo da su ***nepristrane*** ako svi elementi matrice HK^* imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{2n}$.

- tada je $2n = a^2 + b^2$, za neke nenegativne cijele brojeve a, b

Međusobno nepristrane Hadamardove matrice

Definicija 1.3

Za dvije **kompleksne Hadamardove matrice** H i K reda $2n$ kažemo da su ***nepristrane*** ako svi elementi matrice HK^* imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{2n}$.

- tada je $2n = a^2 + b^2$, za neke nenegativne cijele brojeve a, b

Primjer 3.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow HK^* = \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix}$$

Primjer 4.

- dvije nepristrane kompleksne Hadamardove matrice reda 10 (Darcy Best, H. Kharaghani) ; $\quad - = -1,\ j = -i$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & - & - & - & i & j & 1 & - & 1 \\
1 & - & 1 & - & - & j & - & i & 1 & 1 \\
1 & - & - & 1 & - & j & 1 & 1 & i & - \\
1 & - & - & - & 1 & i & 1 & - & 1 & j \\
1 & j & i & i & j & - & i & j & j & i \\
1 & i & - & 1 & 1 & j & - & - & - & 1 \\
1 & 1 & j & 1 & - & i & - & - & 1 & - \\
1 & - & 1 & j & 1 & i & - & 1 & - & - \\
1 & 1 & 1 & - & i & j & 1 & - & - & -
\end{pmatrix},
\begin{pmatrix}
j & - & - & 1 & 1 & 1 & 1 & j & i & 1 \\
j & 1 & 1 & 1 & i & - & j & 1 & i & j \\
1 & j & i & j & 1 & - & 1 & i & 1 & i \\
1 & i & j & 1 & j & j & - & 1 & 1 & i \\
i & 1 & - & i & j & i & 1 & 1 & 1 & j \\
i & 1 & i & j & 1 & 1 & - & 1 & - & 1 \\
1 & i & 1 & 1 & 1 & i & i & - & j & j \\
- & j & 1 & 1 & - & 1 & i & i & 1 & 1 \\
1 & 1 & j & - & i & 1 & j & - & 1 & 1 \\
- & 1 & 1 & i & 1 & j & 1 & j & j & i
\end{pmatrix}
$$

Sadržaj

Nepristrane kompleksne Had. matrice reda $2n$, n neparan

- oznaka: $MUCH(2n)$

U nastavku poglavlja tražimo gornju granicu za **broj međusobno nepristranih kompleksnih Hadamardovih matrica reda** $2n$**,** n **neparan**:

$$|MUCH(2n)|.$$

Regularnost po retcima

Lema 2.1

Neka je H kompleksna Had. matrica reda n kojoj su apsolutne vrijednosti suma redaka sve identične i jednake r. Tada je:

$$r = \sqrt{n}.$$

Regularnost po retcima

Lema 2.1

Neka je H kompleksna Had. matrica reda n kojoj su apsolutne vrijednosti suma redaka sve identične i jednake r. Tada je:

$$r = \sqrt{n}.$$

Definicija 2.2

Kompleksna Had. matrica reda n je ***regularna po retcima*** ako su joj apsolutne vrijednosti suma redaka jednake $\sqrt{n}$.

- H po retcima regularna komp. Had. matrica reda $2n$, n neparan $\Rightarrow 2n = a^2 + b^2$, gdje su $|a|$, $|b|$ **neparni** cijeli brojevi

Lema 2.3

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih**, kompleksnih Had. matrica reda $2n$.

Lema 2.3

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih**, kompleksnih Had. matrica reda $2n$.

Teorem 2.4

Za neparan cijeli broj $n \Rightarrow |MUCH(2n)| \leq 2$.

Lema 2.3

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih**, kompleksnih Had. matrica reda $2n$.

Teorem 2.4

Za neparan cijeli broj $n \ \Rightarrow \ |MUCH(2n)| \leq 2$.

- Karaghani i D. Best su kompjuterskom potragom našli mnoge maksimalne skupove *MUCH* matrica redova 10 i 18

Lema 2.3

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih**, kompleksnih Had. matrica reda $2n$.

Teorem 2.4

Za neparan cijeli broj $n \Rightarrow |MUCH(2n)| \leq 2$.

- Karaghani i D. Best su kompjuterskom potragom našli mnoge maksimalne skupove *MUCH* matrica redova 10 i 18

Hipoteza

$|MUCH(2n)| = 2$, za svaki neparan n za koji je $2n$ suma dva kvadrata.

Sadržaj

Nepristrane realne Hadamardove matrice

Definicija 3.1

Dvije **realne Hadamardove matrice** H i K reda n su ***nepristrane*** ako svi elementi matrice HK^T imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{n}$.

Nepristrane realne Hadamardove matrice

Definicija 3.1

Dvije **realne Hadamardove matrice** H i K reda n su ***nepristrane*** ako svi elementi matrice HK^T imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{n}$.

$\Rightarrow \quad HK^T = \sqrt{n}A$, gdje je A realna Had. matrica reda n

Nepristrane realne Hadamardove matrice

Definicija 3.1

Dvije **realne Hadamardove matrice** H i K reda n su ***nepristrane*** ako svi elementi matrice HK^T imaju apsolutnu vrijednost $\sqrt{n}$.

$\Rightarrow$ $HK^T = \sqrt{n}A$, gdje je A realna Had. matrica reda n

$\Rightarrow$ **Nepristrane realne Had. matrice postoje samo za kvadratne redove!**

MUHM reda $4n^2$, n neparan

Lema 3.2

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih** Hadamardovih matrica reda $4n^2$.

MUHM reda $4n^2$, n neparan

Lema 3.2

Za neparan n **ne postoji par** nepristranih, **po retcima regularnih** Hadamardovih matrica reda $4n^2$.

Lema 3.3

Neka je $w(n)$ broj međusobno nepristranih realnih Hadamardovih matrica reda $4n^2$, za neparan n.
Tada je: $w(n) \leq 2$.

Sadržaj

1. Nepristrane Hadamardove matrice
2. Nepristrane kompleksne Had. matrice (*MUCH*) reda $2n$, n neparan
3. Nepristrane realne Hadamardove matrice (*MUHM*)
   - Konstrukcija *MUHM* iz kompleksnih
   - Konstrukcija *MUHM* pomoću latinskih kvadrata
4. Težinske matrice
5. Nepristrane baze

Konstrukcija *MUH* matrica iz kompleksnih

- $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow G(a) := \{a \pm ia, -a \pm ia\}$

Konstrukcija *MUH* matrica iz kompleksnih

- $a \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; G(a) := \{a \pm ia, -a \pm ia\}$

Teorem 3.4

Neka su H i K nepristrane kompleksne Had. matrice reda $2n$, n neparan, za koje je: $2n = a^2 + a^2$, a neparan cijeli broj, te su svi elementi od HK^* iz $G(a)$.

Konstrukcija *MUH* matrica iz kompleksnih

- $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow G(a) := \{a \pm ia, -a \pm ia\}$

Teorem 3.4

Neka su H i K nepristrane kompleksne Had. matrice reda $2n$, n neparan, za koje je: $2n = a^2 + a^2$, a neparan cijeli broj, te su svi elementi od HK^* iz $G(a)$.
Tada **postoji par nepristranih realnih Had. matrica reda** $4n$.

Konstrukcija *MUH* matrica iz kompleksnih

- $a \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; G(a) := \{a \pm ia, -a \pm ia\}$

Teorem 3.4

Neka su H i K nepristrane kompleksne Had. matrice reda $2n$, n neparan, za koje je: $2n = a^2 + a^2$, a neparan cijeli broj, te su svi elementi od HK^* iz $G(a)$.

Tada **postoji par nepristranih realnih Had. matrica reda** $4n$.

Dokaz

- $H = A + iB$, $K = C + iD$ (elementi od A, B, C, D iz $\{0, \pm 1\}$)

$$H' = \begin{bmatrix} A - B & A + B \\ A + B & -A + B \end{bmatrix}, \quad K' = \begin{bmatrix} C - D & C + D \\ C + D & -C + D \end{bmatrix}$$

Sadržaj

1. Nepristrane Hadamardove matrice
2. Nepristrane kompleksne Had. matrice (*MUCH*) reda $2n$, n neparan
3. **Nepristrane realne Hadamardove matrice (*MUHM*)**
   - Konstrukcija *MUHM* iz kompleksnih
   - Konstrukcija *MUHM* pomoću latinskih kvadrata
4. Težinske matrice
5. Nepristrane baze

Latinski kvadrati

Definicija 3.6

Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica ispunjena sa n različitih znakova tako da se svaki znak pojavljuje točno jednom u svakom retku i u svakom stupcu.

Latinski kvadrati

Definicija 3.6

Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica ispunjena sa n različitih znakova tako da se svaki znak pojavljuje točno jednom u svakom retku i u svakom stupcu.

Primjer 5

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Definicija 3.7

Latinski kvadrati L_1 i L_2 su **ortogonalni** ako su svi uređeni parovi koji se dobiju njihovom *superimpozicijom* međusobno različiti.

Definicija 3.7

Latinski kvadrati L_1 i L_2 su **ortogonalni** ako su svi uređeni parovi koji se dobiju njihovom *superimpozicijom* međusobno različiti.

Primjer 6

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 23 & 31 & 12 \\ 32 & 13 & 21 \end{pmatrix}}_{\textit{superimpozicija}}$$

Definicija 3.8

Latinski kvadrati L_1 i L_2 su **odgovarajući *(suitable)*** ako svaka superimpozicija bilo kojeg retka od L_1 na bilo koji redak od L_2 daje samo jedan element oblika (a, a).

Definicija 3.8

Latinski kvadrati L_1 i L_2 su **odgovarajući *(suitable)*** ako svaka superimpozicija bilo kojeg retka od L_1 na bilo koji redak od L_2 daje samo jedan element oblika (a, a).

Primjer 7

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- *MOLS* - međ. ortogonalni lat. kvadrati
- *MSLS* - međ. odgovarajući lat. kvadrati

- *MOLS* - međ. ortogonalni lat. kvadrati
- *MSLS* - međ. odgovarajući lat. kvadrati
- iz para ortogonalnih lat. kvadrata može se konstruirati par odgovarajućih i obratno

Lema 3.9

Postoji m *MOLS* reda $n \Leftrightarrow$ postoji m *MSLS* reda n.

Dokaz leme 3.9

- $L_1,\ L_2$ ***ortogonalni*** lat. kvadrati na $\{1, 2, ..., n\}$
- $((i,j),k)$ neka je ulaz na (i,j)-oj poziciji lat. kvadrata
- $((i,j),k) \to ((k,j),i)$ daje par ***odgovarajućih*** lat. kvadrata

Dokaz leme 3.9

- L_1, L_2 ***ortogonalni*** lat. kvadrati na $\{1, 2, ..., n\}$
- $((i, j), k)$ neka je ulaz na (i, j)-oj poziciji lat. kvadrata
- $((i, j), k) \to ((k, j), i)$ daje par ***odgovarajućih*** lat. kvadrata

Primjer 8

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{MOLS} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{MSLS}$$

Karakterizacija Hadamardovih matrica

Teorem 3.5 (Kharaghani, 1985.)

Postoji Hadamardova matrica reda $2n$ $\Leftrightarrow$ postoji $2n$ (± 1)-matrica $C_0, C_1, ..., C_{2n-1}$ reda $2n$ takvih da:

1. $C_i^T = C_i$;
2. $C_i C_j = 0, \ i \neq j$;
3. $C_i^2 = 2nC_i$;
4. $C_0 + C_1 + ... + C_{2n-1} = 2nI_{2n}$;
5. za C_0 se može uzeti matricu sa svim jedinicama.

Hadamardove matrice Bushovog tipa

- J_n - $n \times n$ matrica sa svim elementima jednakim 1

Definicija 3.10

Hadamardova matrica **Bushovog tipa** je blok matrica $H = [H_{ij}]$ reda $4n^2$ sa veličinom blokova $2n$ takva da:

1. $H_{ii} = J_{2n}$;
2. $H_{ij}J_{2n} = J_{2n}H_{ij} = 0 \;$ za $i \neq j, \; i, j \in \{1, ..., 2n\}$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & - & - \\ 1 & - & 1 & - \\ 1 & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_0 = r_0^t r_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = r_1^t r_1 = \begin{pmatrix} 1 & - & - & 1 \\ - & 1 & 1 & - \\ - & 1 & 1 & - \\ 1 & - & - & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = r_2^t r_2 = \begin{pmatrix} 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - \\ - & 1 & - & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = r_3^t r_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & - & - \\ 1 & 1 & - & - \\ - & - & 1 & 1 \\ - & - & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_0 & C_3 & C_2 \\ C_2 & C_3 & C_0 & C_1 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ L je Had. matrica Bushovog tipa reda 16

Teorem 3.11

Ako postoji m *MSLS* reda $2n$, gdje je $2n$ red Hadamardove matrice H, tada postoji m *MUHM* Bushovog tipa reda $4n^2$.

Teorem 3.11

Ako postoji m MSLS reda $2n$, gdje je $2n$ red Hadamardove matrice H, tada postoji m MUHM Bushovog tipa reda $4n^2$.

Dokaz

- $C_0, C_1, ..., C_{2n-1}$ matrice koje odgovaraju normaliziranoj Had. matrici H
- neka su lat. kvadrati na skupu $\{0, 1, ..., 2n-1\}$
- u svakom lat. kvadratu znak i zamijeni se sa matricom C_i

Teorem 3.12

Neka je m broj *MSLS* reda $2n$, gdje je $2n$ red Hadamardove matrice H. Tada postoji $m+1$ *MUHM* reda $4n^2$.

Teorem 3.12

Neka je m broj *MSLS* reda $2n$, gdje je $2n$ red Hadamardove matrice H. Tada postoji $m+1$ *MUHM* reda $4n^2$.

Dokaz

- r_i neka je i-ti redak od H
- $K = [k_{ij}] := [r_j^T r_i]$

$\Rightarrow$ K je Had. matrica reda $4n^2$ međusobno nepristrana s Had. matricama Bushovog tipa iz prethodnog teorema

Sadržaj

Definicija 4.1

Matrica W reda n s elementima iz $\{0, \pm 1\}$ naziva se **težinska matrica s težinom** p i označava $W(n, p)$, ako je: $WW^T = pI_n$.

Definicija 4.1

Matrica W reda n s elementima iz $\{0, \pm 1\}$ naziva se **težinska matrica s težinom** p i označava $W(n, p)$, ako je: $WW^T = pI_n$.

Primjer 9

$$W = W(7,4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - \\ - & 1 & 0 & 0 & -0- & - & \\ - & - & 1 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & - & - & 1 & 0 & 0 & - \\ - & 0 & - & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & - & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & - & 0 & - & - & 1 \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.2

Dvije težinske matrice W_1 i W_2 reda n s težinom p su nepristrane ako je:

$$W_1 W_2^T = \sqrt{p} W,$$

gdje je W težinska matrica reda n i težine p.

Nepristrane težinske matrice iz lat. kvadrata

- koraci prethodnog teorema mogu se primijeniti i na težinske matrice te dobivamo:

Nepristrane težinske matrice iz lat. kvadrata

- koraci prethodnog teorema mogu se primijeniti i na težinske matrice te dobivamo:

Teorem 4.3

Neka je m broj *MSLS* reda n, gdje je n red težinske matrice W s težinom p. Tada postoji $m+1$ međusobno nepristranih težinskih matrica $W(n^2, p^2)$.

Sadržaj

Nepristrane kompleksne baze

Definicija 5.1

Dvije ortonormalne baze B_1 i B_2 u $\mathbb{C}^n$ su **međusobno nepristrane kompleksne baze (MUCB)** ako je: $|\langle u, v\rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall u \in B_1, v \in B_2$.

Nepristrane kompleksne baze

Definicija 5.1

Dvije ortonormalne baze B_1 i B_2 u $\mathbb{C}^n$ su **međusobno nepristrane kompleksne baze (MUCB)** ako je: $|\langle u, v\rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall u \in B_1, v \in B_2$.

Pr.10 - nepristrane kompleksne baze u $\mathbb{C}^4$

$$M_0 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$
$$M_1 = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,-1,1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)\}$$
$$M_2 = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(1,1,1,1)\}$$
$$M_3 = \{\frac{1}{2}(1,-i,-i,-1), \frac{1}{2}(1,-i,i,1), \frac{1}{2}(1,i,i,-1), \frac{1}{2}(1,i,-i,1)\}$$
$$M_4 = \{\frac{1}{2}(1,-i,-1,-i), \frac{1}{2}(1,-i,1,i), \frac{1}{2}(1,i,-1,i), \frac{1}{2}(1,i,1,-i)\}$$

Nepristrane kompleksne baze

Lema 5.2

$|MUCB(2n^2)| \leq 3$, za svaki neparan cijeli broj n.
Jednakost se postiže za $n = 1, 3$.

Nepristrane realne baze

Definicija 5.3

Dvije ortonormalne baze B_1 i B_2 u $\mathbb{R}^n$ su **međusobno nepristrane realne baze (MURB)** ako je:

$\langle u, v\rangle \in \{\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\}\ , \quad \forall u \in B_1, v \in B_2.$

Nepristrane realne baze

Definicija 5.3

Dvije ortonormalne baze B_1 i B_2 u $\mathbb{R}^n$ su **međusobno nepristrane realne baze (MURB)** ako je:

$\langle u, v\rangle \in \{\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}}\}\ , \quad \forall u \in B_1, v \in B_2.$

Lema 5.4

$|MURB(4n^2)| \leq 3$, za svaki neparan cijeli broj n. Jednakost se postiže za $n = 1, 3$.