Unitali i unitarni polariteti simetričnih dizajna, 1.dio

Doris Dumičić
(ddumicic@math.uniri.hr)
Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci

- **R. Mathon, T. van Trung**: Unitals and Unitary Polarities in Symmetric Designs; Designs, Codes and Cryptography, 10 (1997) 237-250.

- **R. Mathon, T. van Trung**: Unitals and Unitary Polarities in Symmetric Designs; Designs, Codes and Cryptography, 10 (1997) 237-250.

- **S. Barwick, G. Ebert**: Unitals in Projective Planes, Springer, 2008.
- **D. Hughes, F. Piper**: Projective Planes, Springer-Verlag New York , 1973.
- **R. Casse**: Projective Geometry, Oxford , 2006.
- **C. Colbourn, J. Dinitz**: Handbook of Combinatorial Designs, Second edition, 2007.
- **D. Hughes, F. Piper**: Design Theory, Cambridge University Press, 1985.

Projektivna geometrija

Definicija

Konačna incidencijska struktura ili konačna geometrija $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je struktura koja se sastoji od konačnog skupa $\mathcal{P}$ čije elemente zovemo *točke*, skupa $\mathcal{L}$ čije elemente zovemo *pravci*, pri čemu $m \subseteq \mathcal{P}$, $\forall m \in \mathcal{L}$ i relacije incidencije $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

Projektivna geometrija

Definicija

Konačna incidencijska struktura ili konačna geometrija $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ je struktura koja se sastoji od konačnog skupa $\mathcal{P}$ čije elemente zovemo *točke*, skupa $\mathcal{L}$ čije elemente zovemo *pravci*, pri čemu $m \subseteq \mathcal{P}$, $\forall m \in \mathcal{L}$ i relacije incidencije $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

Definicija (sintetički pristup)

Projektivna geometrija P je (ne nužno konačna) incidencijska struktura (geometrija) točaka i pravaca sa svojstvom
(P1) Svaki par različitih točaka leži na jedinstvenom pravcu
(P2) Svaki pravac sadrži barem tri točke
(P3) P sadrži tri nekolinearne točke
(P4) (Veblen-Young aksiom) Ako su X_1, X_2, X_3 međusobno različite točke i ako neki pravac siječe pravce X_1X_2 i X_1X_3 (tako da nisu oba sjecišta X_1), tada on siječe i pravac X_2X_3.

Definicija

Projektivna ravnina π je projektivna geometrija za koju vrijedi

(P4') Svaka dva pravca se presjecaju u jedinstvenoj točki.

Definicija

Projektivna ravnina π je projektivna geometrija za koju vrijedi

(P4') Svaka dva pravca se presjecaju u jedinstvenoj točki.

Teorem: Princip dualnosti

Ako neka tvrdnja vrijedi za projektivnu ravninu, tada njena tzv. dualna tvrdnja dobivena zamjenom zapisa točke pravcem i obratno, također vrijedi za istu projektivnu ravninu.

Definicija

Projektivna ravnina π je projektivna geometrija za koju vrijedi
(P4') Svaka dva pravca se presjecaju u jedinstvenoj točki.

Teorem: Princip dualnosti

Ako neka tvrdnja vrijedi za projektivnu ravninu, tada njena tzv. dualna tvrdnja dobivena zamjenom zapisa točke pravcem i obratno, također vrijedi za istu projektivnu ravninu.

Primjer konstrukcije projektivne geometrije - analitički pristup
Neka je F polje i V $(n+1)-$ dimenzionalan vektorski prostor nad F. Označimo s $PG(n, F)$ kolekciju svih potprostora od V. Kažemo da vektorski potprostor U od V ima *g-dimenziju i*, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ako je on dimenzije *i+1*. $PG(n, F)$ je g-dimenzije n.
Pravcima nazivamo potprostore g-dimenzije 1.
Definiramo $PG_i(n, F)$ kao incidencijsku strukturu čije su *točke* potprostori od V g-dimenzije 0, a *blokovi* potprostori od V g-dimenzije i (*i-ravnine*) s "relacijom incidencije" dobivenom iz inkluzije $0 < i < n$.

Definicija

Projektivna ravnina π je projektivna geometrija za koju vrijedi
(P4') Svaka dva pravca se presjecaju u jedinstvenoj točki.

Teorem: Princip dualnosti

Ako neka tvrdnja vrijedi za projektivnu ravninu, tada njena tzv. dualna tvrdnja dobivena zamjenom zapisa točke pravcem i obratno, također vrijedi za istu projektivnu ravninu.

Primjer konstrukcije projektivne geometrije - analitički pristup
Neka je F polje i V $(n+1)-$ dimenzionalan vektorski prostor nad F. Označimo s $PG(n,F)$ kolekciju svih potprostora od V. Kažemo da vektorski potprostor U od V ima *g-dimenziju i*, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, ako je on dimenzije *i+1*. $PG(n,F)$ je g-dimenzije n.
Pravcima nazivamo potprostore g-dimenzije 1.
Definiramo $PG_i(n,F)$ kao incidencijsku strukturu čije su *točke* potprostori od V g-dimenzije 0, a *blokovi* potprostori od V g-dimenzije i (*i-ravnine*) s "relacijom incidencije" dobivenom iz inkluzije $0 < i < n$.

Grassmanova jednakost za g-dimenziju

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V. Tada vrijedi
$gdim(U + W) + gdim(U \cap W) = gdim(U) + gdim(W)$

Grassmanova jednakost za g-dimenziju

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V. Tada vrijedi
$gdim(U+W)+gdim(U\cap W)=gdim(U)+gdim(W)$

$PG_1(n,F)$ je projektivna geometrija, za $n>1$.

Grassmanova jednakost za g-dimenziju

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V. Tada vrijedi
$gdim(U+W) + gdim(U \cap W) = gdim(U) + gdim(W)$

$PG_1(n, F)$ je projektivna geometrija, za $n > 1$.

$PG_i(n, F)$ je projektivna ravnina ako i samo ako $n = 2$ i $i = 1$.

Općenito se smatra da je $PG(n, F)$ projektivna geometrija.

Grassmanova jednakost za g-dimenziju

Neka su U i W potprostori vektorskog prostora V. Tada vrijedi
$gdim(U+W) + gdim(U \cap W) = gdim(U) + gdim(W)$

$PG_1(n, F)$ je projektivna geometrija, za $n > 1$.

$PG_i(n, F)$ je projektivna ravnina ako i samo ako $n = 2$ i $i = 1$.

Općenito se smatra da je $PG(n, F)$ projektivna geometrija.

Teorem

Konačno polje s q elemenata postoji ako i samo ako je q prim potencija. Sva konačna polja istog reda su izomorfna.

Galois-ovo polje reda q je konačno polje s q elemenata i označavamo ga $GF(q)$ ili $\mathbb{F}_q$, gdje je q prim potencija.

Za $F = GF(q)$, umjesto $PG(n, F)$ i $PG_i(n, F)$ pišemo $PG(n, q)$ i $PG_i(n, q)$.

Definicija

Klasične ili Desarquesove projektivne ravnine su one projektivne ravnine koje su izomorfne s $PG(2, F)$, gdje je F proizvoljno polje.

Definicija

Klasične ili Desarquesove projektivne ravnine su one projektivne ravnine koje su izomorfne s $PG(2,F)$, gdje je F proizvoljno polje.

Alternativna definicija projektivne ravnine $PG(2,F)$

Neka je F polje. Projektivna ravnina $PG(2,F)$ je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ (gdje elemente od $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ nazivamo točke, odnosno pravci, a I je relacija incidencije) koju definiramo:

1. $\mathcal{P} = \{(x,y,z) : x,y,z \in F, x,y,z \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F \backslash \{0\}$ (x,y,z) i $\rho(x,y,z)$ se odnose na istu točku.

2. $\mathcal{L} = \{[a,b,c] : a,b,c \in F, a,b,c \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F \backslash \{0\}$ $[a,b,c]$ i $\rho[a,b,c]$ se odnose na isti pravac.

3. I: točka $P = (x,y,z)$ je incidentna s pravcem $l = [a,b,c]$ ako i samo ako $ax + by + cz = 0$.

Definicija

Klasične ili Desarquesove projektivne ravnine su one projektivne ravnine koje su izomorfne s $PG(2, F)$, gdje je F proizvoljno polje.

Alternativna definicija projektivne ravnine $PG(2, F)$

Neka je F polje. Projektivna ravnina $PG(2, F)$ je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ (gdje elemente od $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ nazivamo točke, odnosno pravci, a I je relacija incidencije) koju definiramo:

1. $\mathcal{P} = \{(x, y, z) : x, y, z \in F, x, y, z \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F \backslash \{0\}$ (x, y, z) i $\rho(x, y, z)$ se odnose na istu točku.
2. $\mathcal{L} = \{[a, b, c] : a, b, c \in F, a, b, c \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F \backslash \{0\}$ $[a, b, c]$ i $\rho[a, b, c]$ se odnose na isti pravac.
3. I: točka $P = (x, y, z)$ je incidentna s pravcem $l = [a, b, c]$ ako i samo ako $ax + by + cz = 0$.

Ako je F konačno polje, tada dobivamo konačnu projektivnu ravninu $PG(2, F)$.

Definicija

Klasične ili Desarquesove projektivne ravnine su one projektivne ravnine koje su izomorfne s $PG(2,F)$, gdje je F proizvoljno polje.

Alternativna definicija projektivne ravnine $PG(2,F)$

Neka je F polje. Projektivna ravnina $PG(2,F)$ je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ (gdje elemente od $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ nazivamo točke, odnosno pravci, a I je relacija incidencije) koju definiramo:

1. $\mathcal{P} = \{(x,y,z) : x,y,z \in F, x,y,z \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F\backslash\{0\}$ (x,y,z) i $\rho(x,y,z)$ se odnose na istu točku.

2. $\mathcal{L} = \{[a,b,c] : a,b,c \in F, a,b,c \text{ nisu istovremeno } 0\}$, uz pretpostavku da $\forall \rho \in F\backslash\{0\}$ $[a,b,c]$ i $\rho[a,b,c]$ se odnose na isti pravac.

3. I: točka $P = (x,y,z)$ je incidentna s pravcem $l = [a,b,c]$ ako i samo ako $ax + by + cz = 0$.

Ako je F konačno polje, tada dobivamo konačnu projektivnu ravninu $PG(2,F)$.

Teorem

Svaki pravac u projektivnoj ravnini $PG(2,q)$ sadrži $q+1$ točku. Broj q nazivamo **red** od $PG(2,q)$.

Klasična projektivna ravnina $PG(2, q)$ reda q, q je prim potencija, je simetričan $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$ dizajn.

Klasična projektivna ravnina $PG(2,q)$ reda q, q je prim potencija, je simetričan $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$ dizajn.

Teorem

Neka je π projektivna ravnina s konačno točaka N_2. Tada

1. Svaki pravac u π ima isti broj $N_1 = n+1$ točaka.Broj n zovemo red ravnine π.
2. Broj $N_2 = n^2+n+1$.

Korolar

Neka je π proizvoljna konačna projektivna ravnina. Tada postoji $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, kojeg nazivamo *red* od π za koji vrijedi
a) svaki pravac od π sadrži $n+1$ točku,
b) svaka točka leži na $n+1$ pravaca,
c) broj točaka u π je n^2+n+1,
d) broj pravaca u π je n^2+n+1.

Odnosno, konačne projektivne ravnine reda $n \geq 2$ su simetrični $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ dizajni.

Korolar

Neka je π proizvoljna konačna projektivna ravnina. Tada postoji $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, kojeg nazivamo *red* od π za koji vrijedi
a) svaki pravac od π sadrži $n+1$ točku,
b) svaka točka leži na $n+1$ pravaca,
c) broj točaka u π je n^2+n+1,
d) broj pravaca u π je n^2+n+1.

Odnosno, konačne projektivne ravnine reda $n \geq 2$ su simetrični $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ dizajni.

Teorem

Ako je q prim potencija, onda postoji projektivna ravnina reda q, tj. simetričan $2-(q^2+q+1, q+1, 1)$ dizajn.

Unitali

Unitali

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, kažemo da je $2-(n^3+1, n+1, 1)$ dizajn **unital** reda n.

Unitali

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, kažemo da je $2-(n^3+1, n+1, 1)$ dizajn **unital** reda n.

Definicija

Unital $\mathcal{U}$ reda n uložen u projektivnu ravninu π reda n^2 je unital čiji su blokovi skupovi kolinearnih točaka od π i svaki pravac te ravnine presjeca $\mathcal{U}$ u $n+1$ ili jednoj točki.

Polaritet projektivne ravnine

Definicija

Automorfizme projektivnih ravnina nazivamo *kolineacije* projektivne ravnine.

Polaritet projektivne ravnine

Definicija

Automorfizme projektivnih ravnina nazivamo *kolineacije* projektivne ravnine.

Definicija

Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ projektivna ravnina. *Korelacija* je bijekcija $\rho : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \to \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ takva da vrijedi $\mathcal{P}^\rho = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^\rho = \mathcal{P}$ i $P \ I \ m \Longleftrightarrow m^\rho \ I \ P^\rho, \forall P \in \mathcal{P}$ i $\forall m \in \mathcal{L}$.
Polaritet ρ je involutorna korelacija, odnosno $\rho^2 = id$.

Polaritet projektivne ravnine

Definicija

Automorfizme projektivnih ravnina nazivamo *kolineacije* projektivne ravnine.

Definicija

Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ projektivna ravnina. *Korelacija* je bijekcija $\rho : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \to \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ takva da vrijedi $\mathcal{P}^\rho = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^\rho = \mathcal{P}$ i $P \ I \ m \Longleftrightarrow m^\rho \ I \ P^\rho, \forall P \in \mathcal{P}$ i $\forall m \in \mathcal{L}$.
Polaritet ρ je involutorna korelacija, odnosno $\rho^2 = id$.

Definicija

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ incidencijska struktura. *Dualna incidencijska struktura* $\mathcal{D}^* = (\mathcal{B}, \mathcal{P}, I^*)$ pri čemu $(b, P) \in I^*$ ako i samo ako $(P, b) \in I$.

Polaritet projektivne ravnine

Definicija

Automorfizme projektivnih ravnina nazivamo *kolineacije* projektivne ravnine.

Definicija

Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ projektivna ravnina. *Korelacija* je bijekcija $\rho : \mathcal{P} \cup \mathcal{L} \to \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ takva da vrijedi $\mathcal{P}^\rho = \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^\rho = \mathcal{P}$ i $P \ I \ m \Longleftrightarrow m^\rho \ I \ P^\rho, \forall P \in \mathcal{P}$ i $\forall m \in \mathcal{L}$.
Polaritet ρ je involutorna korelacija, odnosno $\rho^2 = id$.

Definicija

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ incidencijska struktura. *Dualna incidencijska struktura* $\mathcal{D}^* = (\mathcal{B}, \mathcal{P}, I^*)$ pri čemu $(b, P) \in I^*$ ako i samo ako $(P, b) \in I$.

Definicija

Neka je ρ polaritet projektivne ravnine $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$. Točke i pravce zovemo apsolutnim ako su incidentni sa svojom slikom po ρ. Inače ih zovemo neapsolutnim točkama, odnosno pravcima.

Propozicija (Baer, 1946)

Neka je $P = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, I)$ samodualna projektivna ravnina reda n i ρ njen polaritet. Tada vrijedi

a) Svaki apsolutni pravac sadrži jedinstvenu apsolutnu točku. Dualno, svaka apsolutna točka leži na jedinstvenom apsolutnom pravcu.

b) Nisu sve točke, niti pravci apsolutni.

c) Broj neapsolutnih točaka i pravaca je paran.

d) Ako je n paran, tada svaki pravac ima neparan broj apsolutnih točaka, stoga barem jednu apsolutnu točku.

e) Ako je n neparan, tada je pravac apsolutan akko sadrži jedinstvenu apsolutnu točku.

f) Ako je n paran, tada je broj apsolutnih točaka barem $n + 1$.

g) Ako je n neparan, tada uz pretpostavku da postoji barem jedna apsolutna točka, broj apsolutnih pravaca je barem $n + 1$.

h) Ako ρ ima točno $n + 1$ apsolutnu točku, tada vrijedi:

(i) za n paran, apsolutne točke su kolinearne,

(ii) za n neparan, apsolutne točke čine $(n + 1)$-luk, tj.oval.

Polariteti konačnih projektivnih ravnina

Teorem

Polaritet ρ projektivne ravnine reda n ima barem $n+1$ apsolutnih točaka, tj. $a(\rho) \geq n+1$.

Vrijedi

Za polaritet ρ projektivne ravnine reda n vrijedi $n+1 \leq a(\rho) < n^2+n+1$.

Polariteti konačnih projektivnih ravnina

Teorem

Polaritet ρ projektivne ravnine reda n ima barem $n+1$ apsolutnih točaka, tj. $a(\rho) \geq n+1$.

Vrijedi

Za polaritet ρ projektivne ravnine reda n vrijedi $n+1 \leq a(\rho) < n^2+n+1$.

Definicija

Ortogonalni polaritet ρ projektivne ravnine reda n je polaritet s točno $n+1$ apsolutnih točaka.

Teorem

Neka je ρ polaritet projektivne ravnine reda $n = s^2$. Tada vrijedi $n+1 \leq a(\rho) \leq s^3+1$.

Unitarni polaritet

Definicija

Neka je dana projektivna ravnina reda $n = s^2$. Polaritete čiji je broj apsolutnih točaka maksimalan, odnosno jednak $s^3 + 1$, nazivamo *unitarni polariteti*.

Unitarni polaritet

Definicija

Neka je dana projektivna ravnina reda $n = s^2$. Polaritete čiji je broj apsolutnih točaka maksimalan, odnosno jednak $s^3 + 1$, nazivamo *unitarni polariteti*.

Teorem

Neka je ρ unitarni polaritet projektivne ravnine reda $n = s^2$. Skup apsolutnih točaka i neapsolutnih pravaca od ρ čine unital, tj. $2 - (s^3 + 1, s + 1, 1)$ dizajn.

Unitarni polaritet

Definicija

Neka je dana projektivna ravnina reda $n = s^2$. Polaritete čiji je broj apsolutnih točaka maksimalan, odnosno jednak $s^3 + 1$, nazivamo *unitarni polariteti*.

Teorem

Neka je ρ unitarni polaritet projektivne ravnine reda $n = s^2$. Skup apsolutnih točaka i neapsolutnih pravaca od ρ čine unital, tj. $2-(s^3+1, s+1, 1)$ dizajn.

Polaritet klasičnih projektivnih ravnina

Klasična projektivna ravnina $PG(2, q^2)$, gdje je q prim potencija, ima unitarni polaritet. Unital, tj. $2-(q^3+1, q+1, 1)$-dizajn, dobiven od tog unitarnog polariteta nazivamo *klasični ili Hermitski unital*.

Unitarni polaritet

Definicija

Neka je dana projektivna ravnina reda $n = s^2$. Polaritete čiji je broj apsolutnih točaka maksimalan, odnosno jednak $s^3 + 1$, nazivamo *unitarni polariteti*.

Teorem

Neka je ρ unitarni polaritet projektivne ravnine reda $n = s^2$. Skup apsolutnih točaka i neapsolutnih pravaca od ρ čine unital, tj. $2 - (s^3 + 1, s + 1, 1)$ dizajn.

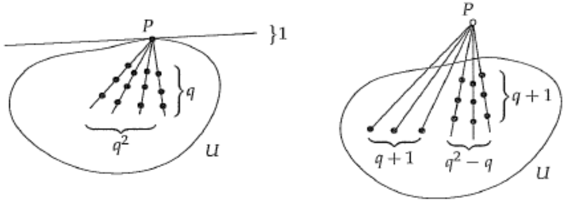
Polaritet klasičnih projektivnih ravnina

Klasična projektivna ravnina $PG(2, q^2)$, gdje je q prim potencija, ima unitarni polaritet. Unital, tj. $2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$-dizajn, dobiven od tog unitarnog polariteta nazivamo *klasični ili Hermitski unital*.

Korolar

Ako je q prim potencija, tada postoji unital, tj. $2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$- dizajn.

Promotrimo unital $\mathcal{U}$ uložen u $PG(2, q^2)$, tj. klasičnu projektivnu ravninu reda q^2.
Pravce nazivamo koji $\mathcal{U}$ sijeku u $(q+1)-$ članim podskupovima *sekantama*.
Iz kombinatoričkog gledišta:
Kroz svaku točku $P \in U$ prolazi $r = \frac{v-1}{k-1} = \frac{q^3}{q} = q^2$ sekanti i još jedan pravac iz $PG(2, q^2)$ koji presjeca U u P koji zovemo *tangenta*.



Iz kombinatoričkog gledišta imamo:

Karakterizacija unitala uloženih u projektivnu ravninu

Unital $\mathcal{U}$ reda s je uložen u projektivnu ravnini π reda $n = s^2$ ako i samo ako $\mathcal{U}$ je podskup od $s^3 + 1$ točaka sa svojstvom :

Kroz svaku točku $P \in \mathcal{U}$ prolazi točno jedan pravac (tangenta) iz π koji presjeca $\mathcal{U}$ u točki P i postoji s^2 pravaca (sekanti) iz π koji presjecaju $\mathcal{U}$ u $(s+1)$-članim podskupovima. $(*)$

Unital u simetričnom dizajnu

Definicija (∗∗)

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ simetričan $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Neka je $\mathcal{U}$ podskup skupa točaka iz $\mathcal{D}$ sa svojstvom:

Svaka točka $P \in \mathcal{U}$ je incidentna s $k-1$ blokova iz $\mathcal{D}$ koji sijeku $\mathcal{U}$ u α točaka i s točno jednim blokom koji presjeca $\mathcal{U}$ u točki P.

Unital u simetričnom dizajnu

Definicija $(**)$

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ simetričan $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Neka je $\mathcal{U}$ podskup skupa točaka iz $\mathcal{D}$ sa svojstvom:

Svaka točka $P \in \mathcal{U}$ je incidentna s $k-1$ blokova iz $\mathcal{D}$ koji sijeku $\mathcal{U}$ u α točaka i s točno jednim blokom koji presjeca $\mathcal{U}$ u točki P.

Blokove od $\mathcal{D}$ koji $\mathcal{U}$ sijeku u α - članim podskupovima nazivamo *sekante*, dok blokove koji ga presjecaju u jednoj točki nazivamo *tangente*.

Unital u simetričnom dizajnu

Definicija $(**)$

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ simetričan $2-(v, k, \lambda)$ dizajn. Neka je $\mathcal{U}$ podskup skupa točaka iz $\mathcal{D}$ sa svojstvom:

Svaka točka $P \in \mathcal{U}$ je incidentna s $k-1$ blokova iz $\mathcal{D}$ koji sijeku $\mathcal{U}$ u α točaka i s točno jednim blokom koji presjeca $\mathcal{U}$ u točki P.

Blokove od $\mathcal{D}$ koji $\mathcal{U}$ sijeku u α - članim podskupovima nazivamo *sekante*, dok blokove koji ga presjecaju u jednoj točki nazivamo *tangente*.

Lema [M.J.de Resmini, On sets of type (m,n) in BIBD's with $\lambda \geq 2$]

Neka je $\mathcal{U}$ podskup skupa točaka dizajna $\mathcal{D}$ koji zadovoljava (**). Tada vrijedi:
(i) $n = k - \lambda$ je kvadrat
(ii) $\alpha = \sqrt{n} + 1$,
(iii) $|\mathcal{U}| = 1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda$, posebno $1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda \in \mathbb{N}$,
(iv) Točke od $\mathcal{U}$ i njegove sekante čine $2 - (1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda, \sqrt{n}+1, \lambda)$ dizajn.

Definicija

Skup točaka $\mathcal{U}$ iz $\mathcal{D}$ koji ima svojstvo iz definicije (**) nazivamo *unital*.

Također i dizajn dobiven iz $\mathcal{U}$ i pripadnih sekanti nazivamo *unital*.

Definicija

Skup točaka $\mathcal{U}$ iz $\mathcal{D}$ koji ima svojstvo iz definicije (**) nazivamo *unital*.

Također i dizajn dobiven iz $\mathcal{U}$ i pripadnih sekanti nazivamo *unital*.

Lema

Neka je $\mathcal{U}$ skup od $u = 1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda$ točaka iz dizajna $\mathcal{D}$. Pretpostavimo da svaki blok iz $\mathcal{D}$ presjeca $\mathcal{U}$ u 1 ili $\sqrt{n}+1$ točaka. Tada je $\mathcal{U}$ unital.

Definicija

Skup točaka $\mathcal{U}$ iz $\mathcal{D}$ koji ima svojstvo iz definicije (**) nazivamo *unital*.

Također i dizajn dobiven iz $\mathcal{U}$ i pripadnih sekanti nazivamo *unital*.

Lema

Neka je $\mathcal{U}$ skup od $u = 1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda$ točaka iz dizajna $\mathcal{D}$. Pretpostavimo da svaki blok iz $\mathcal{D}$ presjeca $\mathcal{U}$ u 1 ili $\sqrt{n}+1$ točaka. Tada je $\mathcal{U}$ unital.

Lema

Neka je $\mathcal{U}$ unital u $\mathcal{D}$ i neka je točka $P \notin \mathcal{U}$. Tada kroz tu točku prolazi $(\sqrt{n}+1)$ tangenti i $(k-\sqrt{n}-1)$ sekanti.

Definicija

Skup točaka $\mathcal{U}$ iz $\mathcal{D}$ koji ima svojstvo iz definicije (**) nazivamo *unital*.

Također i dizajn dobiven iz $\mathcal{U}$ i pripadnih sekanti nazivamo *unital*.

Lema

Neka je $\mathcal{U}$ skup od $u = 1 + (k-1)\sqrt{n}/\lambda$ točaka iz dizajna $\mathcal{D}$. Pretpostavimo da svaki blok iz $\mathcal{D}$ presjeca $\mathcal{U}$ u 1 ili $\sqrt{n}+1$ točaka. Tada je $\mathcal{U}$ unital.

Lema

Neka je $\mathcal{U}$ unital u $\mathcal{D}$ i neka je točka $P \notin \mathcal{U}$. Tada kroz tu točku prolazi $(\sqrt{n}+1)$ tangenti i $(k-\sqrt{n}-1)$ sekanti.

Lema

Ako simetričan dizajn $\mathcal{D}$ sadrži unital, isto tako će unital sadržavati i njegov dual $\mathcal{D}^*$.

Rezultati

Primjer 1

Biravnina je simetričan $2-(v,k,2)$ dizajn, gdje je $k \geq 2$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

B_1 je $2-(16,6,2)$ biravnina.
$\mathcal{U} = \{5,9,13,6,11,16\}$ je unital u dizajnu B_1.

$2-(16,6,2)$ biravnine (do na izomorfizam)

Dizajn	B_1	B_2	B_3
#unitala	192	64	0
Red grupe automorfizama	11250	768	384

Primjer 2

Hadamardov dizajn je simetričan $2-(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajn za $n \geq 2$.
Hadamardovi $2-(15, 7, 3)$ dizajni (do na izomorfizam)[Nandi, Bhat i Shrikhande]:

Dizajn	C_1	C_2	C_3	C_4	$C_5 \cong PG_2(3, 2)$
#unitala	0	24	0	72	168

Primjer 2

Hadamardov dizajn je simetričan $2-(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajn za $n \geq 2$.
Hadamardovi $2-(15, 7, 3)$ dizajni (do na izomorfizam)[Nandi, Bhat i Shrikhande]:

Dizajn	C_1	C_2	C_3	C_4	$C_5 \cong PG_2(3,2)$
#unitala	0	24	0	72	168

Primjer 3

$2-(56, 11, 2)$ biravnine (do na izomorfizam):

Dizajn	$B_1(11)$	$B_2(11)$	$B_3(11)$	$B_4(11)$	$B_5(11)$
#unitala	13314	2538	462	260	78
Red grupe automorfizama	80640	288	144	64	24

Unitali u dizajnima točaka i hiperravnina, $PG_{d-1}(d,q)$

Unitali u dizajnima točaka i hiperravnina, $PG_{d-1}(d,q)$

$PG_{d-1}(d,q)$ je simetričan *dizajn točaka i hiperravnina* s parametrima $v = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$, $k = \frac{q^{d}-1}{q-1}$, $\lambda = \frac{q^{d-1}-1}{q-1}$, gdje je q prim potencija i $d \geq 2$.

Unitali u dizajnima točaka i hiperravnina, $PG_{d-1}(d,q)$

$PG_{d-1}(d,q)$ je simetričan *dizajn točaka i hiperravnina* s parametrima $v=\frac{q^{d+1}-1}{q-1}$, $k=\frac{q^{d}-1}{q-1}$, $\lambda=\frac{q^{d-1}-1}{q-1}$, gdje je q prim potencija i $d\geq 2$.

Lema [Hughes,Piper: Design Theory]

Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem GF(q) i neka je U $m-$dimenzionalan potprostor od V, $0\leq m<n$. Tada broj $(m+h)$-dimenzionalnih potprostora od V koji sadrže U je

$$\frac{(q^{n-m}-1)(q^{n-m}-q)\cdots(q^{n-m}-q^{h-1})}{(q^{h}-1)(q^{h}-q)\cdots(q^{h}-q^{h-1})}$$

Unitali u dizajnima točaka i hiperravnina, $PG_{d-1}(d,q)$

$PG_{d-1}(d,q)$ je simetričan *dizajn točaka i hiperravnina* s parametrima $v = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$, $k = \frac{q^{d}-1}{q-1}$, $\lambda = \frac{q^{d-1}-1}{q-1}$, gdje je q prim potencija i $d \geq 2$.

Lema [Hughes,Piper: Design Theory]

Neka je V $n-$dimenzionalan vektorski prostor nad poljem GF(q) i neka je U $m-$dimenzionalan potprostor od V, $0 \leq m < n$. Tada broj $(m+h)$-dimenzionalnih potprostora od V koji sadrže U je

$$\frac{(q^{n-m}-1)(q^{n-m}-q)\cdots(q^{n-m}-q^{h-1})}{(q^{h}-1)(q^{h}-q)\cdots(q^{h}-q^{h-1})}$$

Teorem

Ako dizajn točaka i hiperravnina, $PG_{d-1}(d,q)$, sadrži unital, tada je $d \in \{2,3\}$.

Definicija

Za skup točaka $\mathcal{O}$ projektivne geometrije $P = PG(d, F)$, nad poljem F, kažemo da je *ovoid* ako nikoje tri točke iz $\mathcal{O}$ nisu kolinearne te za svaku točku $T \in \mathcal{O}$ tangencijalni pravci kroz T čine hiperravninu u P.

Definicija

Za skup točaka $\mathcal{O}$ projektivne geometrije $P = PG(d, F)$, nad poljem F, kažemo da je *ovoid* ako nikoje tri točke iz $\mathcal{O}$ nisu kolinearne te za svaku točku $T \in \mathcal{O}$ tangencijalni pravci kroz T čine hiperravninu u P.

Teorem

Skup točaka $\mathcal{U}$ u $PG_2(3, q)$ je unital akko $\mathcal{U}$ je ovoid u $PG(3, q)$.