Gornje granice za kromatski broj grafa

Ana Barić

Uvod

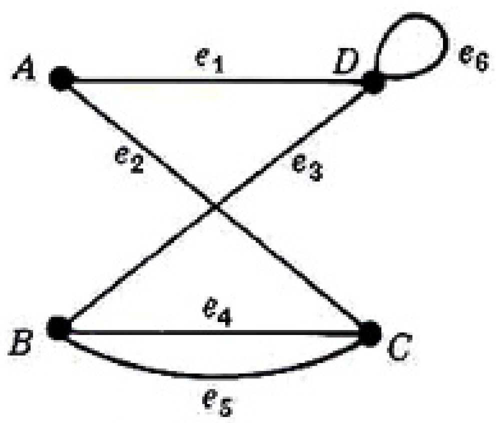
- Koliko boja trebamo kako bismo obojili države na zemljopisnoj karti tako da su susjedne države obojene različitim bojama?
- Koliko dana je potrebno kako bismo rasporedili sastanke odbora parlamenta ako se svaki odbor sastaje jedan dan i neki članovi parlamenta moraju sudjelovati na više odbora?
- Ako imamo mnogo različitih vrsta riba takvih da određene vrste riba jedu neke druge vrste riba, koliko akvarija nam je potrebno tako da ne postoji opasnost da se ribe međusobno pojedu?

Grafovi

- Graf je uređena trojka $G=(V,E,\varphi)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V(G)$ čiji su elementi **vrhovi** od G, skupa $E(G)$ disjunktnog s $V(G)$ čiji su elementi **bridovi** od G i funkcije incidencije φ koja svakom bridu e od G pridružuje neuređeni par vrhova $\varphi(e)=\{u,v\}$ (ne nužno različitih) koji se zovu **krajevi** od e.
- Krajevi u i v brida e su **incidentni** s bridom i obratno.
- Za dva vrha u i v koji su incidentni s istim bridom e kažemo da su **susjedni.**

Grafovi

- Brid koji je incidentan samo s jednim vrhom zove se **petlja.**
- Dva brida ili više njih s istim parom krajeva zovu se **višestruki bridovi**.
- Graf G je **jednostavan** ako nema ni petlja ni višestrukih bridova.

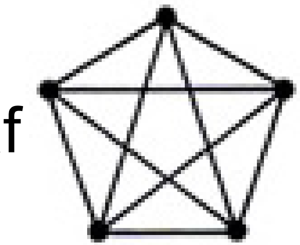


Grafovi

- Graf sa samo jednim vrhom zove se **trivijalan**, a inače **netrivijalan**.
- G je prazan graf ako je $E(G)=\emptyset$.
- Neka su G i H grafovi. Ako je $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ i svaki brid iz H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G, onda kažemo da je H **podgraf** od G i pišemo $H \subseteq G$, a G zovemo **nadgraf** od H.

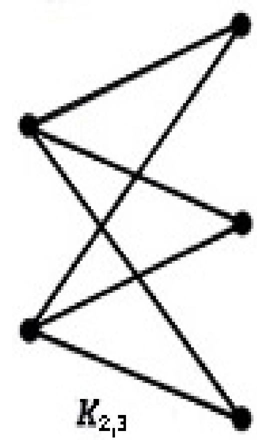
Grafovi

- Jednostavan graf u kojem je svaki par vrhova spojen bridom zove se **potpun graf**.
- Do izomorfizma postoji jedinstveni potpun graf s n vrhova kojeg označavamo s K_n.



K_5

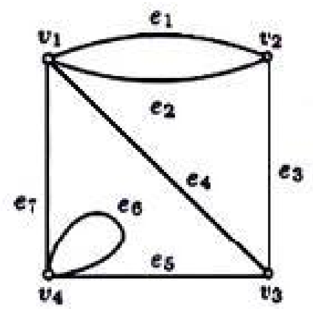
- Graf G je **bipartitan** (ili **dvodijelni**) ako mu se skup vrhova može podijeliti u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Particija $\{X,Y\}$ zove se **biparticija grafa**.
- **Potpun bipartitni graf** je jednostavan bipartitni graf s biparticijom $\{X,Y\}$ u kojem je svaki vrh iz X spojen sa svakim vrhom u Y. Ako je $|X|=m$ i $|Y|=n$, takav graf označavamo s $K_{m,n}$.



$K_{2,3}$

Matrica incidencije i matrica susjedstva

- Neka je G graf s vrhovima $v_1,\ldots,v_n$ i bridovima $e_1,\ldots,e_m$.
- **Matrica incidencije** grafa G je (pravokutna) $n{\times}m$*-matrica* $M(G)=[m_{ij}]$, $m_{ij}=0,1$ *ili 2.*
- **Matrica susjedstva** grafa G *je (kvadratna)* $n \times n$*-matrica* $A(G)=[a_{ij}]$, a_{ij} je broj bridova koji spajaju v_i i v_j.
- Ako je G jednostavan, onda je A *(0,1)-matrica*.



$$M(G) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

$$A(G) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \end{array}$$

Stupanj vrha

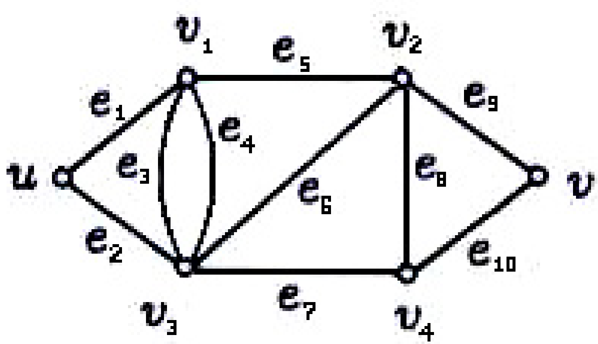
- Ako je G jednostavan graf, onda definiramo **stupanj ili valenciju vrha** v kao broj bridova od G incidentnih s v, pri čemu se svaka petlja računa kao dva brida.
- Oznaka za stupanj je $d_G(v)$.
- **Minimalni** i **maksimalni stupanj** grafa G označavamo na sljedeći način:

$$\delta(G) := \min_{v \in V(G)} d_G(v)$$

$$\Delta(G) := \max_{v \in V(G)} d_G(v)$$

Šetnja, staza i put

- **Šetnja** u grafu G je netrivijalni konačan niz $W:=v_0e_1v_1e_2...e_kv_k$ čiji su članovi naizmjence vrhovi v_i i bridovi e_i, tako da su krajevi od e_i vrhovi v_{i-1} i v_i, $1\leq i\leq k$.
- Šetnja W je **zatvorena** ako je $v_0=v_k$.
- Ako su svi bridovi $e_1,e_2,..,e_k$ šetnje W međusobno različiti, onda se W zove **staza**, a ako su na stazi i svi vrhovi $v_0, ...,v_k$ međusobno različiti, ona se zove **put**.



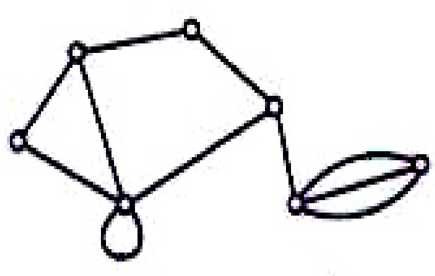
$$(u,v)-\text{šetnja}: ue_1v_1e_3v_3e_7v_4e_7v_3e_6v_2e_9v$$

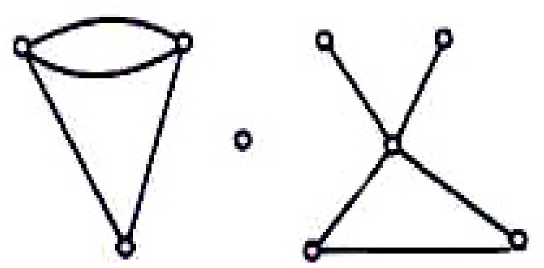
$$(u,v)-\text{staza}: ue_2v_3e_3v_1e_4v_3e_7v_4e_{10}v$$

$$(u,v)-\text{put}: ue_2v_3e_4v_1e_5v_2e_9v$$

Povezanost grafova

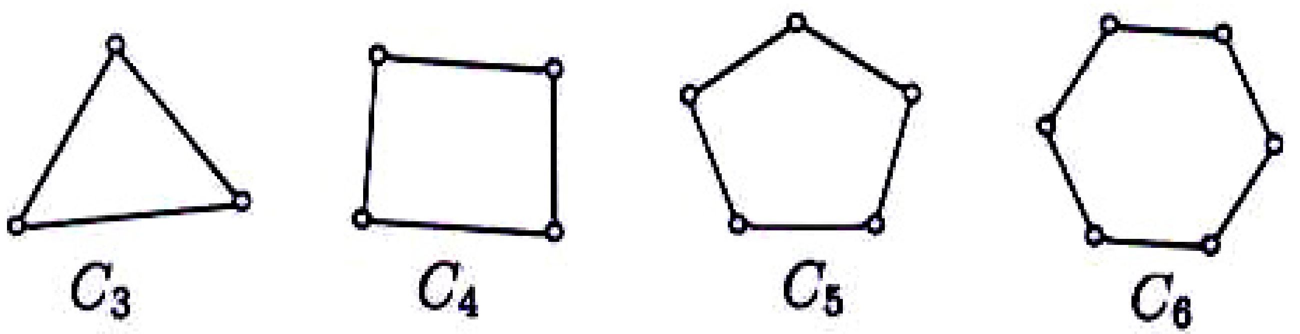
- Dva vrha *u,v* grafa *G* su **povezana** ako postoji *(u,v)*-put u *G*.
- Graf je **povezan** ako su svaka dva njegova vrha povezana nekim putom.
- **Komponenta povezanosti** grafa *G* je maksimalni povezan podgraf od *G*.
- Ako graf ima samo jednu komponentu povezanosti, onda kažemo da je graf povezan (u suprotnom nepovezan).





Ciklusi

- Zatvorena staza pozitivne duljine čiji su vrhovi (osim krajeva) međusobno različiti zove se **ciklus**.
- Za ciklus duljine k kažemo da je $\boldsymbol{k}$**-ciklus**.
- k-ciklus je **paran** ako je k paran, a inače je **neparan**.

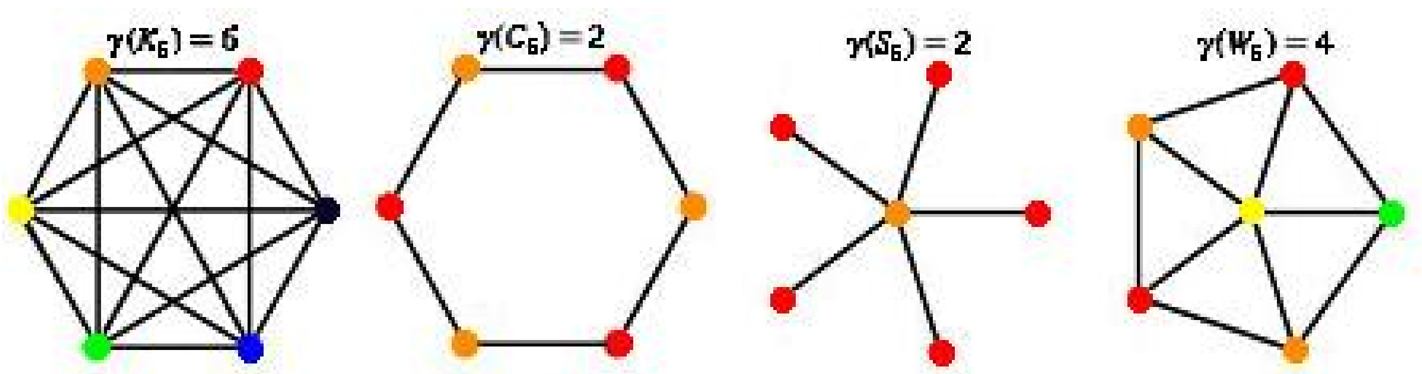


Bojanje grafova i kromatski broj

- ***k*-bojenje** vrhova grafa G je funkcija $c{:}V(G)\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ koja svakom vrhu iz G pridružuje neku boju $1,\ldots,k$.
- Bojenje c je **pravilno** ako su susjedni vrhovi različito obojeni.
- **Pravilno *k*-bojenje** grafa G bez petlji je rastav $\{V_1,V_2,\ldots V_k\}$ od $V(G)$ na k disjunktnih skupova (od kojih neki mogu biti prazni) koji su nezavisni ($S\subseteq V(G)$ je nezavisan ako nema susjednih vrhova u S).
- Graf je ***k*-obojiv** ako dopušta pravilno k-bojenje vrhova.
- Graf je *k*-obojiv ako i samo ako je pripadni jednostavni graf *k*-obojiv.

Bojanje grafova i kromatski broj

- Graf je 1-obojiv ako i samo ako je prazan (tj. $E(G)=\emptyset$).
- Graf je 2-obojiv ako i samo ako je bipartitan.
- **Kromatski broj** $\gamma(G)$ grafa G je najmanji broj $k\in N$ takav da je G k-obojiv.
- G je ***k*-kromatski** ako je $\gamma(G)=k$.



Bojanje grafova i kromatski broj

- Sljedeća tablica prikazuje kromatske brojeve za neke poznate klase grafova.

graf **G**	$\gamma(\mathbf{G})$
potpuni graf K_n	n
ciklički graf C_n , $n > 1$	3 *za* n *neparan* 2 *za* n *paran*
zvijezda graf S_n , $n > 1$	2
kolo graf W_n , $n > 2$	3 *za* n *neparan* 4 *za* n *paran*

- **Propozicija**
- Za svaki graf G vrijedi $\gamma(G) \leq \Delta(G)+1$

Veza $\gamma(G)$ s nekim parametrima grafa G

- **Propozicija**
- Svaki graf G s m vrhova zadovoljava:

$$\gamma(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

- **Teorem**
- Ako su λ_{min} i λ_{max} najmanja i najveća svojstvena vrijednost matrice susjedstva A(G), onda je

$$1 - (\lambda_{\max} / \lambda_{\min}) \leq \gamma(G) \leq 1 + \lambda_{\max}$$

Veza $\chi(G)$ s nekim parametrima grafa G

- **Erdös-Faber-Lovászova slutnja:**
- Neka je G unija od najviše n potpunih grafova K_n, tako da svaka dva imaju najviše jedan zajednički vrh. Tada je G n-obojiv.

- **Hadwigerova slutnja:**
- Ako je G k-kromatski graf, onda se G može kontraktirati na graf koji sadrži K_k (tj. K_k je minora od G).
- Za $k=4$ dokaz je dao Dirac 1952.
- Za $k=5$ slutnja je ekvivalentna s teoremom o četiri boje.

Brooksov teorem

- **<u>Teorem</u>**
- Za svaki graf G je $\chi(G)\leq \Delta(G)+1$. Ako je $\Delta(G)=2$, onda vrijedi jednakost ako i samo ako je neka komponenta od G neparni ciklus. Ako je $\Delta(G)\neq 2$, onda jednakost vrijedi ako i samo ako je neka komponenta od G potpun graf na $\Delta(G)+1$ vrhova.
- Ekvivalentno: za jednostavni povezan graf *G* koji nije potpun niti je neparni ciklus vrijedi $\chi(G)\leq \Delta(G)$.

Modifikacije Brooksovog teorema

- Borodin i Kostochka, Catlin te Lawrence su nezavisno došli do zaključka da isključenje egzistencije manjih potpunih podgrafova može poboljšati gornju granicu za $\gamma(G)$.
- Neka je zadan graf G. Ako $K_r \nsubseteq G$, gdje je $4 \leq r \leq \Delta(G)+1$, tada

$$\gamma(G) \leq \Delta(G) + 1 - \left\lfloor \frac{\Delta(G)+1}{r} \right\rfloor$$

- Za slučajeve bez trokuta Kostochka je unaprijedio rezultate te dobio:

$$\gamma(G) \leq \frac{2}{3}(\Delta(G)+3)$$

Modifikacije Brooksovog teorema

- Nedavno to je učinio i Kim te dobio:

$$\gamma(G) \leq c \cdot \frac{\Delta(G)}{\log \Delta(G)}\ ,\ c \text{ je konstanta}$$

- Stacho je također nastojao modificirati Brooksovu gornju granicu na sljedeći način.
- Neka je zadan graf G, definiramo

$$\Delta_2 = \max_{u \in V(G)} \max_{\substack{v \in N(u) \\ d(v) \leq d(u)}} d(v)$$

tj. $\Delta_2(G)$ je najveći stupanj koji vrh v može imati s obzirom da je v susjedan vrhu čiji je stupanj velik barem koliko i njegov sam.

Modifikacije Brooksovog teorema

- U mnogim slučajevima, $\Delta_2(G)$ je dosta manji od maksimalnog stupnja $\Delta(G)$. Na primjer, ako je $n \geqslant 1$, tada je $\Delta_2(K_{1,n}) = 1$. Njegov glavni rezultat je:

- **<u>Teorem</u>**
- Neka je G graf. Tada je $\gamma(G) \leq \Delta_2(G) + 1$.

- Po teoremu dobivamo $\gamma(\mathrm{K}_{1,\mathrm{n}}) \leq 2$, dok prema svim prethodnim rezultatima imamo da je

$$\gamma(K_{1,n}) \leq \frac{2}{3}(n+3) \quad \text{ili} \quad \gamma(K_{1,n}) \leq c \cdot \frac{n}{\log n}, \text{c je konstanta}$$

Modifikacije Brooksovog teorema

- Iz teorema se dobivaju sljedeća tri korolara.
- **Korolar**
- Neka je G graf i neka $K_r \nsubseteq G$, gdje je $4 \leq r \leqslant \Delta_2(G)$. Tada je

$$\gamma(G) \leq \Delta_2(G) - \left\lfloor \frac{\Delta_2(G)}{r} \right\rfloor + 1$$

- **Korolar**
- Neka je G graf bez trokuta. Tada je

$$\gamma(G) \leq \frac{2}{3}(\Delta_2(G) + 2) + 1$$

Modifikacije Brooksovog teorema

- **Korolar**
- Neka je G graf bez trokuta s $\Delta_2(G) \geqslant 2$. Tada je

$$\gamma(G) \leq c \cdot \frac{\Delta_2(G)}{\log \Delta_2(G)}\ , \ c \text{ je konstanta}$$

Modifikacije Brooksovog teorema

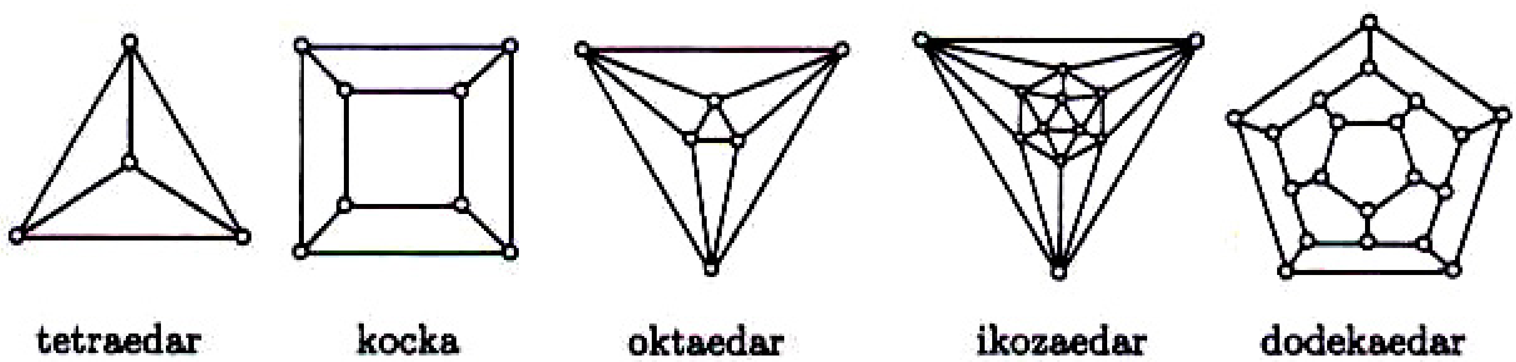
- Stacho je dao još jednu gornju granicu za kromatski broj grafa.
- Neka V_i označava skup vrhova stupnja i u grafu G.
- Definiramo $s = max_{i \geq (\Delta(G)+2)/2} |V_i|$, tj. s je maksimalni broj vrhova istog stupnja, svaki barem $(\Delta(G)+2)/2$.

- **<u>Teorem</u>**
- Za svaki graf G vrijedi

$$\gamma(\mathrm{G}) \leq \left\lceil \frac{s}{s+1}(\Delta(G)+2) \right\rceil$$

Planarni grafovi

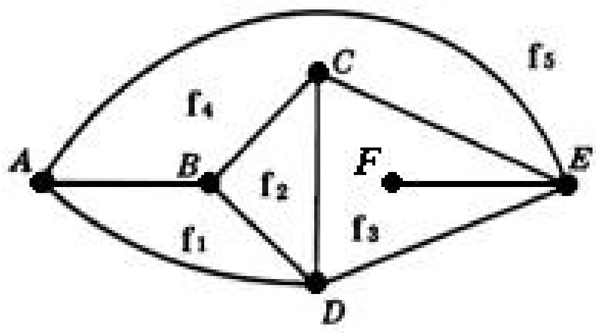
- Graf je **planaran (ravninski)** ako se može smjestiti (nacrtati) u ravnini $\mathcal{R}^2$ tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.
- Grafovi svih pet pravilnih poliedara (tzv. Platonovih tijela) su planarni.



- Graf koji nije planaran zove se **neplanaran** (K_5, $K_{3,3}$).

Dualni grafovi

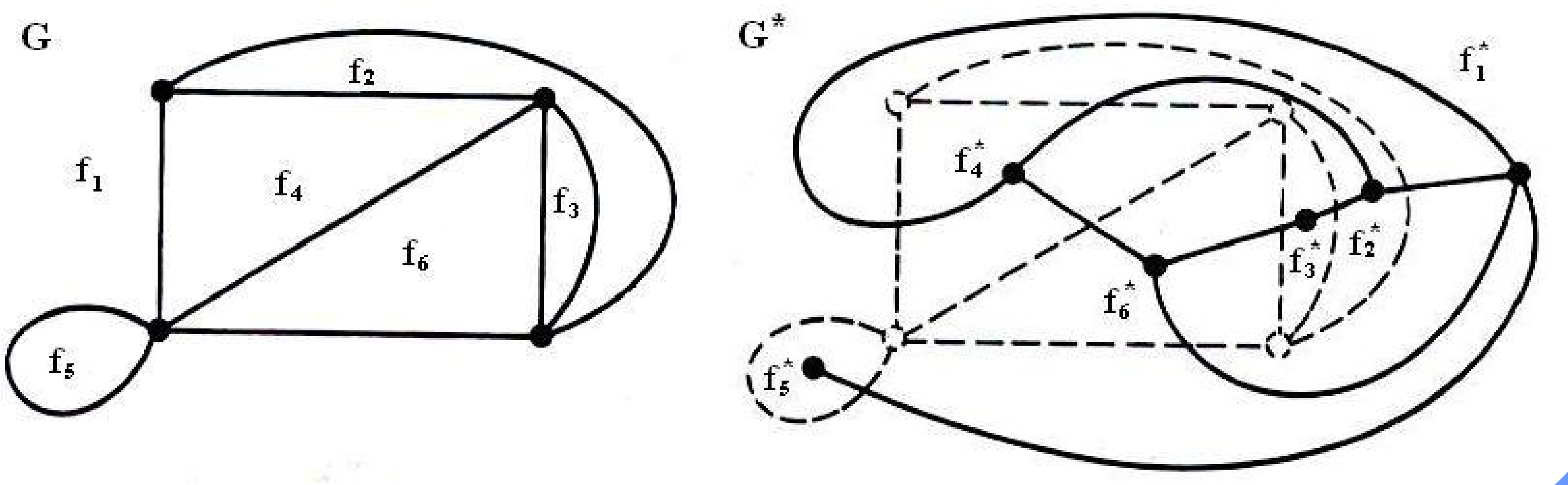
- Ravninski graf G dijeli komponente od G u ravnini na područja. Zatvorenja tih područja zovu se **strane** grafa G.



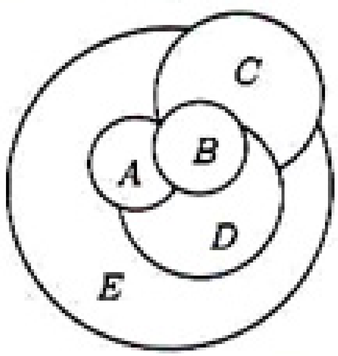
- Svaki ravninski graf ima točno jednu neomeđenu stranu koju zovemo **vanjska strana**.
- Brid (ili vrh) od G je **incidentan** sa stranom ako je sadržan u toj strani.

Dualni grafovi

- Ravninskom grafu G je pridružen njegov (ravninski) **dualni graf** G^*.
- Vrhovi od G^* su strane od G.
- Dva vrha iz G^* su spojena bridom e^* ako i samo ako su pripadne strane iz G incidentne sa zajedničkim bridom e.



Problem 4 boje



- Problem 4 boje je postavio Francis Guthrie 1852.
- Postavio je opće pitanje može li se svaka planarna karta obojiti s četirima bojama.
- Problem su pokušali riješiti de Morgan, Cayley, Hamilton i drugi.

Problem 4 boje

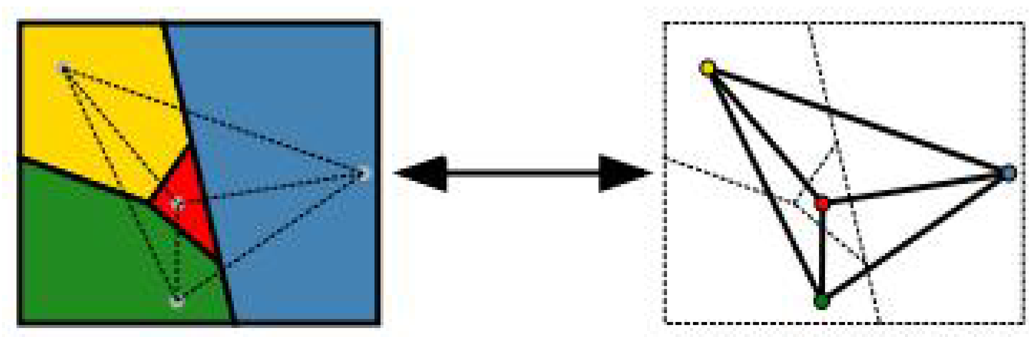
- 1879. Kempe je prvi objavio “rješenje” problema.
- 1880. Tait je dao još jedan dokaz.
- 1890. Heawood je pokazao da Kempeov dokaz ne vrijedi i dokazao teorem o 5 boja.

- **Teorem**
- Svaki planaran graf je 5-obojiv.

- 1891. Petersen je pokazao da Taitov dokaz ne vrijedi.
- 1943. Hadwiger je postavio *Hadwigerovu slutnju* (generalizacija teorema o četiri boje).
- Tijekom 1860-tih i 1870-tih Heesch je razvio metodu kojom se može kompjutor primijeniti u dokazivanju.

Problem 4 boje

- Prelaskom na dualni graf, problem četiriju boja pita je li planaran graf 4-obojiv?
- Svako područje mape zamijenjeno je vrhom grafa, a dva vrha su povezana bridom ako i samo ako dva područja dijele granicu (ne samo rubnu točku).



Problem 4 boje

- 1976. Appel i Haken uspjeli su dokazati da je svaku kartu u ravnini moguće obojiti četirima bojama.
- **Teorem**
- Svaki planaran graf je 4-obojiv.
- Prvi veliki teorem koji je dokazan uz pomoć računala (problem su sveli na ispitivanje 1955 tipova grafova)
- Detalji dokaza pojavili su se u dva članka 1977.

Primjena bojenja grafova u igri *Sudoku*

- *Sudoku* je logička igra slaganja brojeva.
- Cilj igre – ispuniti 9×9 mrežu (može biti 16 × 16 ili veća) tako da svaki red, svaki stupac i svaki od devet 3 × 3 kvadrata (blokovi ili regije) sadrže brojeve od 1 do 9.
- Slagalica se zadaje kao djelomično ispunjena mreža.

3	5	9	2	4	8	1	6	7
4	8	1	6	7	3	5	9	2
7	2	6	9	1	5	8	3	4
8	1	4	7	3	6	9	2	5
2	6	7	1	5	9	3	4	8
5	9	3	4	8	2	6	7	1
6	7	2	5	9	1	4	8	3
9	3	5	8	2	4	7	1	6
1	4	8	3	6	7	2	5	9

Primjena bojenja grafova u igri *Sudoku*

- Ispunjena *Sudoku* slagalica je tip latinskog kvadrata s dodatnim ograničenjem na sadržaju individualnih blokova.
- L. Euler se ponekad pogrešno navodi kao izvor slagalice.
- Modernu slagalicu je izmislio američki arhitekt H. Garns 1979., a objavio Dell Magazines pod imenom "Number place".
- Slagalica je postala popularna u Japanu 1986., nakon što ju je objavio japanski izdavač Nikoli i dao joj ime *Sudoku* ("brojevi moraju ostati pojedinačno").

Primjena bojenja grafova u igri *Sudoku*

- *Sudoku* slagalica – problem bojenja grafova.
- Svrha igre – konstruiranje pravilnog 9-bojenja određenog grafa tako da se najprije zadaje djelomično 9-bojenje.
- Zadani graf ima 81 vrhova (vrh → ćelija mreže).
- Vrhove označimo uređenim parovima *(x,y), x,y=1,…,9.*
- Dva vrha označena s *(x,y)* i *(x',y')* spojena su bridom ako i samo ako
  - $x=x'$ (isti stupac) ili
  - $y=y'$ (isti redak) ili
  - $\left\lceil \frac{\mathbf{x}}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{\mathbf{x}'}{3} \right\rceil, \left\lceil \frac{y}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{y'}{3} \right\rceil$ (isti 3 × 3 blok)

Zaključak

- Teorija grafova, a time i traženje kromatskog broja grafa ima široku primjenu u stvarnom životu.
- Taj problem još uvijek je popularan među matematičarima koji neprestano nastoje poboljšati tu granicu te, ako je moguće, odrediti točnu vrijednost za kromatski broj proizvoljnog grafa.