Tranzitivne kombinatoričke strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3,3)$

Andrea Švob
(asvob@math.uniri.hr)

19. siječnja 2012.

- D. Crnković, V. Mikulić Crnković, A. Švob, On some transitive combinatorial structures constructed from the unitary group $U(3,3)$ (poslano za objavljivanje)
- Metoda konstrukcije tranzitivnih 1-dizajna konstruiranih iz konačne grupe
- Metoda se koristi za dobivanje 2-dizajna i jako regularnih grafova, koji su konstruirani na konjugacijskim klasama maksimalnih i drugih maksimalnih podgrupa pod djelovanjem unitarne grupe $U(3,3)$ ili pod djelovanjem njenih maksimalnih podgrupa

Incidencijske strukture

Definicija

Incidencijska struktura $\mathcal{D}$ *je uređena trojka* $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, *gdje su* $\mathcal{P}$ *i* $\mathcal{B}$ *neprazni disjunktni skupovi i* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. *Elementi skupa* $\mathcal{P}$ *se nazivaju* **točke**, *elementi skupa* $\mathcal{B}$ **blokovi**, *a relacija* $\mathcal{I}$ **relacija incidencije**.

Broj blokova koji su incidentni s točkom P naziva se **stupanj točke** P i broj točaka koje su incidentne s blokom x naziva se **stupanj bloka** x.

Za incidencijsku strukturu u kojoj je svaka od v točaka stupnja r i svaki od b blokova stupnja k vrijedi $vr = bk$.

Definicija

Incidencijska struktura je simetrična ako je broj točaka jednak broju blokova tj. $|\mathcal{P}| = |\mathcal{B}|$

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ konačna incidencijska struktura takva da je $|\mathcal{P}| = v$ i $|\mathcal{B}| = b$. Označimo elemente skupa $\mathcal{P}$ sa $P_1, ..., P_v$ i elemente skupa $\mathcal{B}$ sa $x_1, ..., x_b$. **Matrica incidencije** incidencijske strukture $\mathcal{D}$ je $v \times b$ matrica $\mathbf{M} = (m_{ij})$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (P_i, x_j) \in \mathcal{I}, \\ 0, & (P_i, x_j) \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Dualna struktura

Struktura $\mathcal{D}^* = (\mathcal{P}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{I}^*)$, gdje je $\mathcal{P}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{P}$, $\mathcal{I}^* = \{(x, P) | (P, x) \in \mathcal{I}\}$ naziva se **dualna struktura** strukture $\mathcal{D}$.

Komplementarna struktura

Incidencijska struktura $\tilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \tilde{\mathcal{I}})$ gdje je $\tilde{\mathcal{I}} = \mathcal{P} \times \mathcal{B} - \mathcal{I}$, tj. vrijedi $(x, B) \in \tilde{\mathcal{I}} \Leftrightarrow (x, B) \notin \mathcal{I}$, naziva se **komplementarna struktura** strukture $\mathcal{D}$.

Definicija

Neka su $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ *i* $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$ *incidencijske strukture. Bijektivno preslikavanje* $f : \mathcal{P} \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$ *je* **izomorfizam** *iz* $\mathcal{D}$ *na* $\mathcal{D}'$ *ako vrijedi:*

1. f *preslikava* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{P}'$ *i* $\mathcal{B}$ *na* $\mathcal{B}'$
2. $(P, x) \in \mathcal{I} \Rightarrow (f(P), f(x)) \in \mathcal{I}'$, $\forall P \in \mathcal{P}$ *i* $\forall x \in \mathcal{B}$

Ako je $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, *onda se preslikavanje* f *naziva* **automorfizam**. *Skup svih automorfizama je grupa s obzirom na kompoziciju funkcija i naziva se* **puna grupa automorfizama** *strukture* $\mathcal{D}$.

Samodualna struktura

Struktura $\mathcal{D}$ naziva se samodualna struktura ako je izomorfna svojoj dualnoj strukturi.

Dizajni

Definicija

Konačna incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ *je* $t-(v,k,\lambda)$ **dizajn** *ako vrijedi sljedeće:*

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. *svaki element skupa* $\mathcal{B}$ *incidentan je s točno* k *elemenata skupa* $\mathcal{P}$,
3. *svakih* t *elemenata skupa* $\mathcal{P}$ *incidentno je s točno* λ *elemenata skupa* $\mathcal{B}$.

Definicija

$2-(v,k,\lambda)$ *dizajn naziva se* **blok dizajn**.

Definicija

$t-(v,k,\lambda)$ *dizajn takav da je* $v = b$ *naziva se* **simetričan dizajn**.

Teorem

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ $t - (v, k, \lambda)$ *dizajn. Tada je* $\mathcal{D}$ *ujedno i* $s - (v, k, \lambda_s)$ *dizajn, za svaki* s *iz skupa* $\{1, ...t - 1\}$, *gdje je*

$$\lambda_s \binom{k-s}{t-s} = \lambda \binom{v-s}{t-s}.$$

Svaki $t-$ dizajn ujedno je i $s-$ dizajn za $s < t$ te vrijedi da je svaki blok dizajn ujedno i $1-$ dizajn.

Grafovi

Definicija

Neka je $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ konačna incidencijska struktura. $\mathcal{G}$ je **graf** *ako je svaki element skupa $\mathcal{E}$ incidentan s dva (ne nužno različita) elementa iz skupa $\mathcal{V}$. Elementi skupa $\mathcal{V}$ se nazivaju* **vrhovi** *i elementi skupa $\mathcal{E}$* **bridovi**.

Dva vrha u i v su susjedna ako su incidentna s istim bridom. Broj bridova incidentnih s vrhom v naziva se **stupanj vrha** v. Brid e koji spaja vrh v sa samim sobom naziva se **petlja**.

Graf bez petlji u kojemu su svaka dva vrha incidentna najviše s jednim bridom naziva se **jednostavan graf**.

Matrica susjedstva grafa $\mathcal{G}$ s n vrhova $(v_1, ..., v_n)$ je $n \times n$ matrica **A**. Element a_{ij} matrice **A** je broj bridova incidentnih s vrhovima v_i i v_j.

Graf u kojem su svi vrhovi jednakog stupnja k naziva se $k-$**regularan graf**.

Definicija

Neka je $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ *graf sa* n *vrhova. Graf* $\mathcal{G}$ *je* **jako regularan graf** *s parametrima* (n, k, λ, μ) *ako vrijedi:*

1. $\mathcal{G}$ *je jednostavan* $k-$*regularan graf,*
2. *svaka dva susjedna vrha imaju točno* λ *zajedničkih susjednih vrhova,*
3. *svaka dva nesusjedna vrha imaju točno* μ *zajedničkih susjednih vrhova.*

Djelovanja grupe na skup

Definicija

Grupa G **djeluje** *na konačan skup S ako postoji preslikavanje $f : G \times S \to S$ takvo da vrijedi*

1. $f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \ \forall x \in S, \ \forall g_1, \ g_2 \in G,$
2. $f(1, x) = x, \ \forall x \in S.$

Slika djelovanja elementa $g \in G$ na element $x \in S$ označava se $g.x$ ili x^g.

Definicija

Skup $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\} \leq G$ naziva se **stabilizator** *elementa x za djelovanje grupe G.*

Na skupu S na kojeg djeluje grupa G može se definirati relacija

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists g \in G) \text{t.d.je} g.x = y.$$

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu S.

Klasa ekvivalencije elementa x s obzirom na relaciju $\sim$,
$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$, naziva se **orbita** elementa x za djelovanje grupe G.
Dugi način zapisa: $x^G = \{x^g, g \in G\}$

Definicija

Grupa G djeluje **tranzitivno** *na skup S ako postoji element $x \in S$ takav da je $G.x = S$. Odnosno, cijeli skup S je jedna orbita. Grupa G je tranzitivna ako za svaki par točaka $\alpha, \beta \in S$, postoji $g \in G$ takav da je $\alpha^g = \beta$.*

Propozicija

Neka grupa G djeluje na skup S i neka je G_x stabilizator elementa $x \in S$ za djelovanje grupe G. Tada je $G_{g.x} = gG_xg^{-1}$, $\forall g \in G$. Posebno, ako G djeluje tranzitivno na skup S, onda su svi stabilizatori međusobno konjugirani.

Definicija

Neka grupa G djeluje tranzitivno na skup S. To djelovanje je primitivno ako je G_x maksimalna podgrupa grupe G za svaki $x \in S$.

- $U(3,3)$ je jednostavna grupa reda 6048, ima 190 maksimalnih podgrupa i 4 različite $U(3,3)-$ konjugacijske klase maksimalnih podgrupa,
- do na konjugaciju, $U(3,3)$ ima 7 drugih maksimalnih podgrupa.
- Napomena: Normalizatori drugih maksimalnih podgrupa H_1, H_2, H_3 su maksimalne podgrupe.

Tablica: Maksimalne podgrupe grupe $U(3,3)$ (do na konjugaciju)

Podgrupa	Struktura grupe	Red	Red $G-$konjugacijske klase
M_1	$(E_9 : Z_3) : Z_8$	216	28
M_2	$L(2,7)$	168	36
M_3	$(Z_4 \times Z_4) : S_3$	96	63
M_4	$Z_4.S_4$	96	63

Tablica: Druge maksimalne podgrupe grupe $U(3,3)$ (do na konjugaciju)

Podgrupa	Struktura grupe	Red	Red $G-$konjugacijske klase
H_1	$Ex_{27}^{+} : Z_4$	108	28
H_2	$E_4.A_4$	48	63
H_3	$Z_4.A_4$	48	63
H_4	$D_8 : Z_4$	32	189
H_5	S_4	24	252
H_6	$Z_3 : Z_8$	24	252
H_7	$Z_7 : Z_3$	21	288

- J. D. Key, J. Moori:
  Codes, Designs and Graphs from the Janko Groups J_1 and J_2
  J. Combin. Math. Combin. Comput. 40 (2002), 143-159.
- J. D. Key, J. Moori, Correction to: Codes, designs and graphs from the Janko groups J1 and J2 [J. Combin. Math. Combin. Comput. 40 (2002), 143–159], *J. Combin. Math. Combin. Comput.* **64** (2008), 153.

Teorem

Neka je Ω n-člani skup, α element skupa Ω i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupu Ω. Neka je Δ orbita za djelovanje stabilizatora G_α, na neki element $\delta \in \Omega$, $\Delta = \{\delta g : g \in G_\alpha\}$, uz uvjet $\delta \neq \alpha$. Također, neka je za dani $\delta \in \Delta$, $\mathcal{E} = \{\{\alpha, \delta\}g : g \in G\}$. Tada je $\mathcal{B} = \{\Delta g : g \in G\}$ $n-$ člani skup blokova simetričnog $1-(n, |\Delta|, |\Delta|)$ dizajna $\mathcal{D} = (\Omega, \mathcal{B})$. Nadalje, ako je Δ samosparena orbita od G_α tada je $\Gamma(\Omega, \mathcal{E})$ regularan povezan graf valencije $|\Delta|$, $\mathcal{D}$ je samodualan dizajn i G djeluje primitivno kao grupa automorfizama na svaku od ovih struktura.

Ovom metodom moguće je konstruirati samo primitivne simetrične $1-$ dizajne za koje su stabilizatori točke i bloka konjugirani.

- D. Crnković and V. Mikulić, Unitals, projective planes and other combinatorial structure constructed from the unitary groups $U(3,q), q = 3,4,5,7$, Ars Combin,. to appear

Teorem

Neka je Ω_1 $m-$ člani skup, Ω_2 $n-$člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2. Neka je $\alpha \in \Omega_1$, $\delta_1, ..., \delta_s$ predstavnici različitih G_α-orbita na skupu Ω_2 i $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} \delta_i G_\alpha$, uz uvjet da je $\Delta_2 \neq \Omega_2$. Tada je

$$\mathcal{B} = \{\Delta_2 g : g \in G\},$$

skup od m blokova $1-(n, |\Delta_2|, \sum_{i=1}^{s} |\alpha G_{\delta_i}|)$ dizajna na kojega grupa G djeluje primitivno kao grupa automorfizama.

Korolar

Ako grupa G djeluje primitivno na točkama i blokovima $1-$dizajna $\mathcal{D}$, tada se $\mathcal{D}$ može dobiti na način opisan prethodnim teoremom.

- Neka je G jednostavna grupa i H maksimalna podgrupa od G. Konjugacijsku klasu od H označimo sa $ccl_G(H)$. Očito vrijedi $N_G(H) = H$ pa je $|ccl_G(H)| = [G : H]$. Označimo elemente od $ccl_G(H)$ sa $H^{g_1}, H^{g_2}, \ldots, H^{g_j},\ j = [G : H]$.

- Neka je G jednostavna grupa, H_1 i H_2 su **maksimalne podgrupe** od G. Stabilizator od $H_i^x \in ccl_G(H_i)$, $i = 1, 2$, je maksimalna podgrupa H_i^x, stoga G djeluje primitivno na konjugacijsku klasu $ccl_G(H_i)$, $i = 1, 2$, i

$$|ccl_G(H_1)| = [G : H_1] = m,$$

$$|ccl_G(H_2)| = [G : H_2] = n.$$

Konstruiramo primitivni $1-$dizajn na sljedeći način:

- skup točaka: $ccl_G(H_2)$,
- skup blokova: $ccl_G(H_1)$,
- blok $H_1^{g_i}$ je incidentan s točkom $H_2^{h_j}$ ako i samo ako je $H_2^{h_j} \cap H_1^{g_i} \cong G_i$, $i = 1, \ldots, k$, gdje je $\{G_1, ..., G_k\} \subset \{H_2^x \cap H_1^y \mid x, y \in G\}$.
- zapis: $\mathcal{D}(G, H_2, H_1; G_1, ..., G_k)$.

Konstruiramo jako regularan graf na sljedeći način:

- G je jednostavna grupa, a H je maksimalna podgrupa u G
- skup vrhova: $ccl_G(H)$,
- vrh H^{g_i} je incidentan s vrhom H^{g_j} ako i samo ako je $H^{g_i} \cap H^{g_j} \cong G_i$, $i = 1, \ldots, k$, gdje je $\{G_1, ..., G_k\} \subset \{H^x \cap H^y \mid x, y \in G\}$
- regularan graf konstruiran na ovaj način označit ćemo sa $\mathcal{G}(G, H; G_1, ..., G_k)$.

- Strukture konstruirane iz grupe $U(3,3)$; primitivni blok dizajni i primitivni jako regularni grafovi

Tablica: Primitivni blok dizajni konstruirani iz grupe $U(3,3)$

Dizajn	Parametri	Puna grupa automorfizama
$\mathcal{D}(U(3,3), M_1, M_4; Z_3 : Z_8)$	$(28,4,1)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{D}(U(3,3), M_3, M_3; M_3, E_4, D_8 : Z_2)$	$(63,31,15)$	$PGL(6,2)$
$\mathcal{D}(U(3,3), M_4, M_4; M_4, Z_4, Z_4 \times Z_4)$	$(63,31,15)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{D}(U(3,3), M_2, M_2; M_2, S_4)$	$(36,15,6)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{D}(U(3,3), M_1, M_3; Z_8)$	$(28,12,11)$	$S(6,2)$
$\mathcal{D}(U(3,3), M_2, M_3; S_3)$	$(36,16,12)$	$S(6,2)$

Tablica: Primitivni jako regularni grafovi konstruirani iz grupe $U(3,3)$

Graf	Parametri	Puna grupa automorfizama
$\mathcal{G}(U(3,3), M_2; S_4)$	$(36, 14, 4, 6)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{G}(U(3,3), M_3; E_4, D_8 : Z_2)$	$(63, 30, 13, 15)$	$S(6,2)$
$\mathcal{G}(U(3,3), M_4; Z_4, Z_4 \times Z_4)$	$(63, 30, 13, 15)$	$U(3,3) : Z_2$

Prikazat ćemo konstrukciju ne nužno primitivnih, ali tranzitivnih blok dizajna.

Lema

Neka je G konačna permutacijska grupa koja djeluje na skupu X i neka su O_1, O_2, ..., O_k orbite na X pod djelovanjem grupe G. Tada vrijedi

$$\bigcap_{x \in \bigcup_{i=1}^{k} O_i} G_x \trianglelefteq G.$$

Teorem

Neka je Ω_1 $m-$člani skup, Ω_2 $n-$člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje tranzitivno na skupove Ω_1 i Ω_2. Neka je $\alpha \in \Omega_1$, $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^{s} \delta_i G_\alpha$ gdje su $\delta_1, ..., \delta_s$ predstavnici različitih G_α-orbita na skupu Ω_2 uz uvjet da je $\Delta_2 \neq \Omega_2$. Tada je

$$\mathcal{B} = \{\Delta_2 g : g \in G\},$$

skup od $\frac{m \cdot |G_\alpha|}{|G_{\Delta_2}|}$ blokova $1-(n, |\Delta_2|, \frac{|G_\alpha|}{|G_{\Delta_2}|} \sum_{i=1}^{s} |\alpha G_{\delta_i}|)$ dizajna $\mathcal{D}(G, \alpha, \delta_1, ..., \delta_s) = (\Omega_2, \mathcal{B})$, na kojeg grupa $H \cong G / \bigcap_{x \in \Omega_2} G_x$ djeluje tranzitivno kao grupa automorfizama.

Korolar

Ako grupa G djeluje tranzitivno na točkama i blokovima $1-$dizajna $\mathcal{D}$, tada $\mathcal{D}$ možemo dobiti na način opisan prethodnim teoremom.

- M je konačna grupa, H_1, H_2 i G su **podgrupe** od M.
- G djeluje tranzitivno na klasu $ccl_G(H_i)$, $i = 1, 2$,

$$|ccl_G(H_1)| = [G : N_G(H_1)] = m,$$

$$|ccl_G(H_2)| = [G : N_G(H_2)] = n.$$

- Elemente $ccl_G(H_1)$ označimo sa $H_1^{g_1}, H_1^{g_2}, \ldots, H_1^{g_m}$, i elemente od $ccl_G(H_2)$ sa $H_2^{h_1}, H_2^{h_2}, \ldots, H_2^{h_n}$.

Možemo konstruirati 1−dizajn na sljedeći način:

- Skup točaka: $ccl_G(H_2)$,
- skup blokova: $ccl_G(H_1)$,
- Blok $H_1^{g_i}$ je incidentan s točkom $H_2^{h_j}$ ako i samo ako je $H_2^{h_j} \cap H_1^{g_i} \cong G_i$, $i = 1, \ldots, k$, gdje je $\{G_1, ..., G_k\} \subset \{H_2^x \cap H_1^y \mid x, y \in G\}$.

Konstruiramo jako regularan graf na sljedeći način:

- M je konačna grupa, a H i G su podgrupe u M
- skup vrhova: $ccl_G(H)$,
- vrh H^{g_i} je incidentan s vrhom H^{g_j} ako i samo ako je $H^{g_i} \cap H^{g_j} \cong G_i$, $i = 1, \ldots, k$, gdje je $\{G_1, ..., G_k\} \subset \{H^x \cap H^y \mid x, y \in G\}$.
- regularan graf konstruiran na ovaj način označit ćemo sa $\mathcal{G}(G, H; G_1, ..., G_k)$.

- Opisat ćemo 2−dizajne konstruirane na $G-$konjugacijskim klasama maksimalnih i drugih maksimalnih podgrupa i tranzitivne strukture konstruirane iz jednostavne grupe $U(3,3)$
- Grupa G na svim konstruiranim dizajnima djeluje primitivno na točkama, ali tranzitivno i ne primitivno na blokovima.

Tablica: Tranzitivni blok dizajni konstruirani iz grupe $U(3,3)$

Blok dizajn $\mathcal{D}$	Parametri of $\mathcal{D}$	Jednost. dizajn	Odg. jedn. dizajn	$Aut\mathcal{D}$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_4; Z_8)$	$(28,4,3)$	no	$(28,4,1)$	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_4; Z_4)$	$(28,8,14)$	yes		$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_4; Z_4, Z_8)$	$(28,12,33)$	no	$(28,12,11)$	$S(6,2)$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_5; S_3)$	$(28,4,4)$	yes		$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_6; Z_8)$	$(28,3,2)$	yes		$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_6; Z_8, Z_3:Z_8)$	$(28,4,4)$	no	$(28,4,1)$	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_1, H_7; Z_3)$	$(28,7,16)$	yes		$S(6,2)$
$\mathcal{D}(G, M_2, H_4; Z_2)$	$(36,16,36)$	no	$(36,16,12)$	$S(6,2)$
$\mathcal{D}(G, M_2, H_5; Z_2, S_3)$	$(36,16,48)$	no	$(36,16,12)$	$S(6,2)$
$\mathcal{D}(G, M_2, H_7; Z_3, Z_7:Z_3)$	$(36,15,48)$	no	$(36,15,6)$	$U(3,3):Z_2$
$\mathcal{D}(G, M_3, H_4; Z_2, Z_4, Z_2 \times Z_4, Z_4 \times Z_4, D_8:Z_4)$	$(63,31,45)$	no	$(63,31,15)$	$U(3,3):Z_2$

Tablica: Blok dizajni konstruirani iz grupe $U(3,3)$, pomoću konjugacijskih klasa maksimalnih podgrupa, pod djelovanjem maksimalnih podgrupa

Blok dizajn $\mathcal{D}$	Parametri of $\mathcal{D}$	Jednost. dizajn	Odg. jedn. dizajn	$Aut\mathcal{D}$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^4, M_2^3; D_8 : Z_2)$	$(7,3,1)$	yes		$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, M_2^1; D_8 : Z_2, E_4)$	$(7,3,3)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, M_2^2; E_4)$	$(7,3,4)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^7, M_2^2; D_8)$	$(7,3,4)$	yes		$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^3, M_1^2; Z_4 \times Z_4)$	$(9,3,3)$	no	$(9,3,1)$	$(E_9 : Z_2).S_4$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^3, M_1^4; Z_4)$	$(9,4,9)$	no	$(9,4,3)$	$(E_9 : D_8).Z_2$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^3, M_4^3; S_3)$	$(16,6,2)$	yes		$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^5, M_1^5; M_1^5, S_4)$	$(36,15,6)$	yes		$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^2, M_1^2; D_8 : Z_2, E_4)$	$(36,15,6)$	yes		$U(4,2) : Z_2$

Tablica: Jako regularni grafovi konstruirani iz grupe $U(3,3)$ pomoću konjugacijskih klasa maksimalnih podgrupa, pod djelovanja maksimalnih podgrupa

Graf $\mathcal{G}$	Parametri od $\mathcal{G}$	$Aut\mathcal{G}$
$\mathcal{G}(M_4, M_4^3; S_3)$	$(16,6,2,2)$	$(Z_4 \times Z_4) : D_{12}$
$\mathcal{G}(M_1, M_1^1; E_4, D_8 : Z_2)$	$(27,10,1,5)$	$U(4,2) : Z_2$
$\mathcal{G}(M_2, M_2^2; S_3)$	$(28,12,6,4)$	S_8
$\mathcal{G}(M_1, M_1^5; S_4)$	$(36,14,4,6)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{G}(M_1, M_1^2; E_4, D_8 : Z_2)$	$(36,15,6,6)$	$U(4,2) : Z_2$

Tablica: Blok dizajni konstruirani iz grupe $U(3,3)$ pomoću konjugacijskih klasa maksimalnih i drugih maksimalnih podgrupa pod djelovanjem maksimalnih podgrupa

Blok dizajn $\mathcal{D}$	Parametri of $\mathcal{D}$	Jednost. dizajn	Odg. jedn. dizajn	$Aut\mathcal{D}$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^{14}; Z_2 \times Z_4)$	$(7,3,1)$	yes		$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^1; Z_2 \times Z_4, Z_2)$	$(7,3,3)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^6; Z_2)$	$(7,3,4)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^4; E_4, D_8)$	$(7,3,6)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^7, H_2^{25}; I)$	$(7,3,8)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^{22}; I)$	$(7,3,8)$	no	$(7,3,4)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^3, H_2^{19}; Z_8, Z_2)$	$(7,3,12)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^7, H_2^8; E_4)$	$(7,3,12)$	no	$(7,3,4)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_2, M_2^7, H_2^{23}; Z_3)$	$(7,3,24)$	no	$(7,3,1)$	$L(2,7)$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^3, H_1^5; Z_4)$	$(9,3,3)$	no	$(9,3,1)$	$E_9 : (SL(2,3) : Z_2)$
$\mathcal{D}(M_1, H_1^8, H_1^7; Z_4, I)$	$(9,3,9)$	no	$(9,3,1)$	$E_9 : (SL(2,3) : Z_2)$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^3, H_1^7; Z_4, I)$	$(9,4,18)$	no	$(9,4,3)$	$(E_9 : D_8).Z_2$

Tablica: Blok dizajni konstruirani iz grupe $U(3,3)$ pomoću konjugacijskih klasa maksimalnih i drugih maksimalnih podgrupa pod djelovanjem maksimalnih podgrupa

Blok dizajn $\mathcal{D}$	Parametri od $\mathcal{D}$	Jednost. dizajn	Odg. jedn. dizajn	$Aut\mathcal{D}$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^{14}, H_4^{31}; Z_3)$	$(16,5,8)$	yes		$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^{3}, H_4^{10}; Z_3)$	$(16,6,2)$	yes		$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^{10}, H_4^{32}; Z_3)$	$(16,6,4)$	no	$(16,6,2)$	$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^{10}, H_4^{12}; S_3, Z_2)$	$(16,6,6)$	no	$(16,6,2)$	$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_4, H_4^{10}, H_4^{7}; Z_3, Z_2)$	$(16,6,6)$	yes		$E_{16}.S_4$
$\mathcal{D}(M_4, H_4^{13}, H_4^{5}; I)$	$(16,6,6)$	yes		$E_{16}.S_4$
$\mathcal{D}(M_4, M_4^{10}, H_4^{31}; Z_3)$	$(16,6,12)$	no	$(16,6,2)$	$E_{16} : S_6$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^{2}, H_1^{5}; Z_2, Z_2 \times Z_4)$	$(36,15,6)$	yes		$U(4,2) : Z_2$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^{5}, H_1^{15}; Z_7 : Z_3, Z_3)$	$(36,15,12)$	no	$(36,15,6)$	$U(3,3) : Z_2$
$\mathcal{D}(M_1, M_1^{5}, H_1^{14}; Z_7 : Z_3, Z_3)$	$(36,15,36)$	no	$(36,15,6)$	$U(3,3) : Z_2$

Tablica: Jako regularni grafovi konstruirani iz grupe $U(3,3)$ pomoću konjugacijskih klasa drugih maksimalnih podgrupa pod djelovanjem maksimalnih podgrupa

Graf $\mathcal{G}$	Parametri od $\mathcal{G}$	$Aut\mathcal{G}$
$\mathcal{G}(M_4, H_4^{10}; Z_3)$	$(16,6,2,2)$	$(Z_4 \times Z_4) : D_{12}$
$\mathcal{G}(M_1, H_1^{1}; I, Z_4)$	$(27,10,1,5)$	$U(4,2) : Z_2$
$\mathcal{G}(M_1, H_1^{6}; I, E_4)$	$(36,15,6,6)$	$U(4,2) : Z_2$