Konstrukcije λ-konfiguracija

Ana Barić (abaric@math.uniri.hr)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

20. veljače 2009.

- **D. Crnković,** On path graphs of incidence graphs, Mathematical Communications 9 (2004), No.2, 181-188
- **D. Crnković,** Symmetric and resolvable λ-configurations constructed from block designs, Discrete Mathematics 308 (2008), 4829-4832

Grafovi

- **Graf** je uređena trojka $G = (V, E, \varphi)$ koja se sastoji od nepraznog skupa $V(G)$ čiji su elementi vrhovi od G, skupa $E(G)$ disjunktnog s $V(G)$ čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije φ koja svakom bridu e od G pridružuje neuređeni par vrhova $\varphi(e) = \{u, v\}$ (ne nužno različitih).
- **Klika** je skup vrhova u kojem su svi parovi vrhova međusobno susjedni.
- Kardinalni broj najveće klike u grafu G se označava s $\omega(G)$.

Bojenje grafova

- **Bojenje vrhova** grafa $G = (V(G), E(G))$ je funkcija $c : V(G) \rightarrow K$ takva da je $c(v) \neq c(w)$, gdje su v i w susjedni vrhovi.
- Elementi skupa K zovu se raspoložive boje.
- Skup vrhova koji je pridružen jednoj boji zove se klasa boje.
- **Kromatski broj** $\gamma(G)$ je najmanji cijeli broj k takav da G ima bojenje $c : V(G) \rightarrow \{1, ..., k\}$.
- Vrijedi, $\omega(G) \leq \gamma(G)$.

Savršeni graf

- Za $S \subseteq V(G)$ **inducirani podgraf** $G(S)$ grafa G je graf sa skupom vrhova S i skupom bridova iz G koji imaju oba kraja u S.
- Graf G je **savršeni** ako za svaki inducirani podgraf H od G vrijedi $\omega(H) = \gamma(H)$.

Teorem o savršenom grafu

Graf G je savršen ako i samo ako je njegov komplement $\overline{G}$ savršen.

Teorem o jakom savršenom grafu

Graf G je savršen ako i samo ako ni G ni $\overline{G}$ ne sadrže neparne cikluse duljine barem 5 kao inducirane podgrafove.

Linijski i bipartitni grafovi

- **Linijski graf** $L(G)$ grafa G je graf sa skupom vrhova $V(L(G)) = E(G)$ u kojem su dva vrha susjedna ako i samo ako su odgovarajući bridovi susjedni u G.
- Graf G je **bipartitan** ako mu se skup vrhova može particionirati u dva skupa X i Y tako da svaki brid ima jedan kraj u X, a drugi u Y. (X, Y) se zove **biparticija grafa** G.
- Bipartitni grafovi i linijski grafovi bipartitih grafova su savršeni.
- Komplementi bipartitnih grafova i komplementi linijskih grafova bipartitnih grafova su savršeni.

Grafovi puteva

- **Put** u grafu G je netrivijalan niz $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ u kojem su svi vrhovi i svi bridovi međusobno različiti, pri čemu su $v_0, \dots, v_k$ vrhovi grafa G i e_i, $i = 1, \dots k$, bridovi koji su incidentni s vrhovima v_{i-1} i v_i.
- Za dani graf G i pozitivni cijeli broj k, P_k-**graf puteva** $P_k(G)$ je graf koji ima za vrhove skup puteva duljine k u G.
- Dva vrha su spojena u $P_k(G)$ kada presjek odgovarajućih puteva čini put duljine $k-1$ u G i njihova unija čini ili ciklus ili put duljine $k+1$.
- Grafovi puteva su uvedeni kao generalizacija linijskih grafova.
- $P_1(G)$ se podudara s $L(G)$.

Teorem

Neka je G graf. Graf puteva $P_{n+1}(G)$ je izomorfan podgrafu grafa $P_1(P_n(G))$.

Dokaz

- Svaki vrh od $P_{n+1}(G)$ odgovara jednom vrhu od $P_1(P_n(G))$

  Vrh grafa $P_{n+1}(G)$ odgovara putu $v_1 v_2 \ldots v_{n+1} v_{n+2}$, $v_1, \ldots, v_{n+2} \in V(G)$.
  Taj put se podudara s unijom puteva $v_1 v_2 \ldots v_{n+1}$ i $v_2 \ldots v_{n+1} v_{n+2}$ koji određuju dva susjedna vrha u $P_n(G)$.
  Ova dva susjedna vrha u $P_n(G)$ određuju jedan vrh u $P_1(P_n(G))$.

- Dva vrha u $P_1(P_n(G))$ su susjedna ako su odgovarajući vrhovi grafa $P_{n+1}(G)$ susjedni.

  Dva susjedna vrha u $P_{n+1}(G)$ odgovaraju putevima $v_1 v_2 \dots v_{n+1} v_{n+2}$ i $v_2 v_3 \dots v_{n+2} v_{n+3}$.
  Put $v_1 v_2 \dots v_{n+1} v_{n+2}$ se podudara s unijom puteva $v_1 v_2 \dots v_{n+1}$ i $v_2 \dots v_{n+1} v_{n+2}$ koji određuju dva susjedna vrha u $P_n(G)$, tj. vrh X u $P_1(P_n(G))$.
  Put $v_2 v_3 \dots v_{n+2} v_{n+3}$ se podudara s unijom puteva $v_2 v_3 \dots v_{n+2}$ i $v_3 \dots v_{n+2} v_{n+3}$ koji određuju dva susjedna vrha u $P_n(G)$, tj. vrh Y u $P_1(P_n(G))$.
  Vrhovi X i Y su susjedni u $P_1(P_n(G))$.

  Q.E.D.

Lema

Neka je G bipartitan graf i k pozitivan cijeli broj. Tada je $P_{2k}(G)$ bipartitan graf.

Dokaz

- Neka je $\{X, Y\}$ biparticija od $V(G)$.
- Definiramo skupove:
  $\overline{X}$ je skup svih puteva duljine $2k$ u G s prvim vrhom iz X.
  $\overline{Y}$ je skup svih puteva duljine $2k$ u G s prvim vrhom iz Y.
- Dva puta iz $\overline{X}$ (ili $\overline{Y}$) ne mogu imati u presjeku put duljine $2k-1$ tako da njihova unija čini put ili ciklus duljine $2k+1$.

Q.E.D.

Teorem

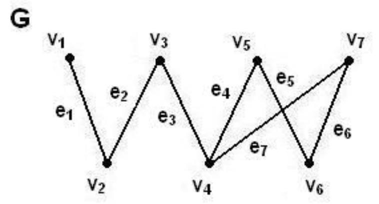
Neka je G bipartitan graf i k pozitivan cijeli broj. Tada su $P_{2k}(G)$ i $P_1(P_{2k})$ i njihovi komplementi savršeni grafovi.

Napomena

Neka je G bipartitan graf i k pozitivan cijeli broj. Tada $P_{2k+1}(G)$ nije nužno savršeni graf.

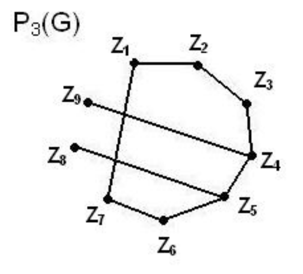
Primjer

Zadan je graf $G = (V(G), E(G))$ gdje je $V(G) = \{v_1, ..., v_7\}$ i $E(G) = \{e_1, ..., e_7\}$.



G je bipartitan graf s biparticijom (X, Y) gdje je $X = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ i $Y = \{v_2, v_4, v_6\}$.

$$
\begin{array}{lll}
Z_1 \longrightarrow v_1 v_2 v_3 v_4 & Z_4 \longrightarrow v_4 v_5 v_6 v_7 & Z_7 \longrightarrow v_7 v_4 v_3 v_2 \\
Z_2 \longrightarrow v_2 v_3 v_4 v_5 & Z_5 \longrightarrow v_5 v_6 v_7 v_4 & Z_8 \longrightarrow v_5 v_4 v_7 v_6 \\
Z_3 \longrightarrow v_3 v_4 v_5 v_6 & Z_6 \longrightarrow v_6 v_7 v_4 v_3 & Z_9 \longrightarrow v_6 v_5 v_4 v_7
\end{array}
$$



$P_3(G)$ nije savršeni graf.

Regularan graf

- Graf u kojem su svi vrhovi jednakog stupnja k naziva se k-**regularan graf**.

Teorem

Neka je G k-regularan graf, $k \geq 2$. Tada su $P_1(G)$ i $P_2(G)$ $(2k-2)$-regularni grafovi.

Napomena

Neka je G k-regularan graf, $k \geq 2$ i $n \geq 3$. Tada $P_n(G)$ nije nužno regularan graf.

Teorem

Neka je G k-regularan bipartitni graf, $k \geq 2$. Tada su $P_1(G)$ i $P_3(G)$ $(2k-2)$-regularni grafovi i $P_2(G)$ je $(2k-2)$-regularan bipartitni graf.

λ-konfiguracija

Definicija

λ-**konfiguracija** $(v_r, b_k)_\lambda$ je konačna incidencijska struktura $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, gdje su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{B}$ disjunktni skupovi i $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ takva da vrijedi

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. $|\mathcal{B}| = b$,
3. svaki element iz $\mathcal{B}$ incidentan je s točno k elemenata iz $\mathcal{P}$,
4. svaki element iz $\mathcal{P}$ incidentan je s točno r elemenata iz $\mathcal{B}$,
5. svaki par različitih elemenata iz $\mathcal{P}$ incidentan je s najviše λ elemenata iz $\mathcal{B}$.

Elementi skupa $\mathcal{P}$ zovu se **točke**, a elementi skupa $\mathcal{B}$ zovu se **blokovi**. Ako je točka P incidentna s blokom x, pišemo $P\mathcal{I}x$.

Definicija

Neka je $\mathcal{I}$ incidencijska struktura sa skupom točaka $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ..., P_v\}$ i skupom blokova $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, ..., x_b\}$. **Incidencijska matrica** od $\mathcal{I}$ je $b \times v$ matrica $M = (m_{ij})$ definirana s

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (x_i, P_j) \in \mathcal{I} \\ 0, & (x_i, P_j) \notin \mathcal{I} \end{cases}$$

Definicija

Neka je M incidencijska matrica incidencijske strukture $\mathcal{I}$. Označimo s M^t transponiranu matricu od M. Graf s matricom susjedstva $\begin{bmatrix} 0 & M \\ M^t & 0 \end{bmatrix}$ zovemo **incidencijski graf** od $\mathcal{I}$.

Teorem

Neka je G incidencijski graf λ-konfiguracije $(v_r, b_k)_\lambda$. Tada su $P_1(G)$ i $P_3(G)$ $(k+r-2)$-regularni grafovi.

Teorem

Neka je G incidencijski graf λ-konfiguracije $(v_r, b_k)_\lambda$. Tada je $P_2(G)$ bipartitan graf. Nadalje, graf $P_2(G)$ je incidencijski graf $(r-1)$-konfiguracije $(v'_{r'}, b'_{k'})_{r-1}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = \binom{k}{2} b$,
2. $b' = \binom{r}{2} v$,
3. $k' = 2k - 2$,
4. $r' = 2r - 2$,
5. svaki par točaka incidentan je s $(r-1)$, 2, 1 ili 0 blokova,
6. svaki par blokova incidentan je s $k-1$, 2, 1 ili 0 točaka.

Dokaz

- G je bipartitan graf s biparticijom $\{X, Y\}$ gdje X odgovara skupu blokova, a Y skupu točaka λ-konfiguracije.
- $P_2(G)$ je bipartitan graf s biparticijom $\{\overline{X}, \overline{Y}\}$ takvom da vrijedi:
  $\overline{X}$ je skup svih puteva duljine 2 u G s prvim vrhom u X.
  $\overline{Y}$ je skup svih puteva duljine 2 u G s prvim vrhom u Y.
- Graf $P_2(G)$ je incidencijski graf od $\mathcal{I}$, gdje $\overline{X}$ odgovara skupu blokova i $\overline{Y}$ odgovara skupu točaka od $\mathcal{I}$.
- Neka je $Z = v_1 v_2 v_3$ vrh iz $\overline{Y}$. Tada $v_1, v_3 \in Y$ i $v_2 \in X$.
  Imamo $|X| = b$ mogućnosti za izbor v_2 i za fiksan v_2 imamo $\binom{k}{2}$ mogućnosti za izbor $\{v_1, v_3\}$.
  Slijedi, $v' = \binom{k}{2} b$.

- Na sličan način, $b' = \binom{r}{2} v$.
- Vrh $Z = v_1 v_2 v_3 \in \overline{Y}$ ima susjede tipa $x v_1 v_2$ ili $v_2 v_3 y$, $x, y \in X$.
  Vrhovi v_1 i v_3 imaju stupanj r i oba su susjedna vrhu v_2 pa imamo $r - 1$ mogućnost za x, y.
  Slijedi, Z ima $2r - 2$ susjeda, tj. $r' = 2r - 2$.
- Slično, $k' = 2k - 2$.

- Vrhovi $Z = v_1v_2v_3$ i $Z_1 = v_3v_4v_5$ imaju jednog zajedničkog susjeda koji odgovara putu $v_2v_3v_4$.
  Vrhovi $Z = v_1v_2v_3$ i $Z_2 = v_1v_6v_3$ imaju dva zajednička susjeda koji odgovaraju putevima $v_6v_1v_2$ i $v_2v_3v_6$.
  Vrhovi $Z = v_1v_2v_3$ i $Z_3 = v_0v_2v_3$ imaju $r-1$ zajednička susjeda koji odgovaraju putevima v_2v_3y, y biramo iz skupa od $r-1$ vrhova.
  Vrhovi $Z = v_1v_2v_3$ i $Z_4 = v_1v_2v_7$ imaju također $r-1$ zajednička susjeda koji odgovaraju putevima xv_1v_2, x biramo iz skupa od $r-1$ vrhova.
  Dva vrha iz $\overline{Y}$ koji odgovaraju putevima koji nemaju zajedničkih točaka, nemaju zajedničkih susjeda.
  Svaki par točaka incidentan je s $r-1$, 2, 1 ili 0 blokova.
- Slično, svaki par blokova je incidentan s $k-1$, 2, 1 ili 0 točaka.

  Q.E.D.

Dizajn

Definicija

Konačna incidencijska struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je $t - (v, k, \lambda)$ **dizajn** ako vrijedi sljedeće:

1. $|\mathcal{P}| = v$
2. svaki element skupa $\mathcal{B}$ incidentan je s točno k elemenata skupa $\mathcal{P}$
3. svakih t elemenata skupa $\mathcal{P}$ incidentno je s točno λ elemenata skupa $\mathcal{B}$

- $2 - (v, k, \lambda)$ dizajn naziva se blok dizajn.
- Ako je $v = b$, tada se $2 - (v, k, \lambda)$ dizajn naziva **simetričan** (v, k, λ) **dizajn**.

Korolar

Neka je G incidencijski graf $2-(v,k,\lambda)$ dizajna. Tada je graf $P_2(G)$ incidencijski graf $(r-1)$-konfiguracije $(v'_{r'}, b'_{k'})_{k-1}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = \binom{v}{2}\lambda$,
2. $b' = \binom{r}{2}v$
3. $k' = 2k-2$,
4. $r' = 2r-2$,
5. svaki par točaka incidentan je s $(r-1)$, 2, 1 ili 0 blokova,
6. svaki par blokova incidentan je s $k-1$, 2, 1 ili 0 točaka.

.

Korolar

Neka je G incidencijski graf simetričnog (v, k, λ) dizajna. Tada je graf $P_2(G)$ incidencijski graf $(k-1)$-konfiguracije $(v'_{r'}, b'_{k'})_{k-1}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = b' = \binom{k}{2}\lambda$,
2. $k' = r' = 2k-2$,
3. svaki par točaka incidentan je s $(k-1)$, 2, 1 ili 0 blokova,
4. svaki par blokova incidentan je s $k-1$, 2, 1 ili 0 točaka.

.

Teorem

Neka je G incidencijski graf $2-(v,k,\lambda)$ dizajna $\mathcal{D}$ i P točka iz $\mathcal{D}$. Neka je v vrh iz G koji odgovara točki P i H je podgraf od $P_2(G)$ koji ima za vrhove skup puteva duljine 2, a sadrže vrh v. Tada je H incidencijski graf $(r-1)$-konfiguracije $(v'_{r'}, b'_{k'})_{r-1}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = (v-1)\lambda$,
2. $b' = \binom{r}{2}$
3. $k' = 2k-2$,
4. $r' = r-1$,
5. svaki par točaka incidentan je s 1 ili $(r-1)$ blokom,
6. svaki par blokova incidentan je s 0 ili $k-1$ točkom.

.

λ-konfiguracije konstruirane iz blok dizajna

- Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn i G pripadni incidencijski graf od $\mathcal{D}$.
- Definirajmo incidencijsku strukturu $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ na sljedeći način:
  $\mathcal{P}_1 = \{(P, x) \mid P \in \mathcal{P},\ x \in \mathcal{B},\ P\mathcal{I}x\}$,
  $\mathcal{B}_1 = \{(P, x, Q) \mid P, Q \in \mathcal{P},\ P \neq Q,\ x \in \mathcal{B},\ P\mathcal{I}x,\ Q\mathcal{I}x\}$,
  $P_1 = (P, x)$, $x_1 = (\overline{P}, \overline{x}, \overline{Q})$, $P_1\mathcal{I}_1x_1 \Leftrightarrow P \in \{\overline{P}, \overline{Q}\}$.
- Incidencijsku strukturu $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ opisujemo:
  $\mathcal{P}_1$ je skup svih bridova od G,
  $\mathcal{B}_1$ je skup svih puteva duljine 2 od G s prvim (i zadnjim) vrhom koji odgovara točki iz $\mathcal{D}$,
  $P_1 \in \mathcal{P}_1$, $x_1 \in \mathcal{B}_1$, $P_1\mathcal{I}_1x_1$ ako i samo ako je unija odgovarajućeg brida i puta duljine 2 put duljine 2 ili 3.

Teorem

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn i $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ incidencijska struktura definirana na prethodno navedeni način. Tada je $\mathcal{D}_1$ $(v-1)\lambda$-konfiguracija $(v'_{r'}, b'_{k'})_{(v-1)\lambda}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = vr = bk$,
2. $b' = \binom{v}{2}\lambda$,
3. $k' = 2r$,
4. $r' = (v-1)\lambda$,
5. svaki par točaka incidentan je s točno $(v-1)\lambda$ ili λ blokova,
6. svaki par blokova incidentan je s točno $2r$, r ili 0 točaka.

- λ-**konfiguracija** $(v_r, b_k)_\lambda$ je simetrična ako je $v = b$ i $r = k$.

Korolar

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn. $(v-1)\lambda$-konfiguracija $\mathcal{D}_1 = (\mathcal{P}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{I}_1)$ je simetrična ako i samo ako je $k = 3$.

Rješive λ-konfiguracije

Definicija

Paralelna klasa ili **klasa rješenja** u λ-konfiguraciji je skup blokova koji particionira skup točaka.
Rješiva λ-konfiguracija je λ-konfiguracija čiji blokovi mogu biti particionirani u paralelne klase.

- Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn i $P \in \mathcal{P}$ točka u $\mathcal{D}$.
- Definirajmo incidencijsku strukturu $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ na sljedeći način:
  $\mathcal{P}_2 = \{(Q, x) \mid Q \in \mathcal{P},\ Q \neq P,\ x \in \mathcal{B},\ P\mathcal{I}x,\ Q\mathcal{I}x\}$,
  $\mathcal{B}_2 = \{(x, P, y) \mid x, y \in \mathcal{B},\ P\mathcal{I}x,\ P\mathcal{I}y\}$,
  $P_2 = (Q, x)$, $x_2 = (\overline{x}, P, \overline{y})$, $P_2\mathcal{I}_2x_2 \Leftrightarrow x = \overline{x}$ ili $x = \overline{y}$.

Teorem

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn, $P \in \mathcal{P}$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ incidencijska struktura definirana na prethodno navedeni način. Tada je $\mathcal{D}_2$ $(r-1)$-konfiguracija $(v'_{r'}, b'_{k'})_{(r-1)}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = r(k-1)$,
2. $b' = \binom{r}{2}$,
3. $k' = 2(k-1)$,
4. $r' = (r-1)$,
5. svaki par točaka incidentan je s točno $(r-1)$ ili 1 blokom,
6. svaki par blokova incidentan je s točno $(k-1)$ ili 0 točaka.

- Neka je S skup, r paran broj i $|S| = r$. Tada postoji $r-1$ particija $R_1, \ldots, R_{r-1}$ skupa S koje sadže 2-podskupove od S tako da za svaki 2-podskup $\{x, y\} \subset S$ postoji točno jedna particija R_i takva da vrijedi $\{x, y\} \in R_i$.

Korolar

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn, $P \in \mathcal{P}$. Ako je r paran, tada je $\mathcal{D}_2$ rješiva $(r-1)$-konfiguracija. Blokovi od $\mathcal{D}_2$ su particionirani na $r-1$ paralelnih klasa od kojih svaka klasa sadrži $\frac{r}{2}$ blokova.

Korolar

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn, $P \in \mathcal{P}$ i $\mathcal{D}_2 = (\mathcal{P}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{I}_2)$ incidencijska struktura definirana na prethodno navedeni način. Tada je dualna struktura $\overline{\mathcal{D}}_2$ od $\mathcal{D}_2$ $(k-1)$-konfiguracija $(v'_{r'}, b'_{k'})_{(k-1)}$ sa sljedećim svojstvima:

1. $v' = \binom{r}{2}$,
2. $b' = r(k-1)$,
3. $k' = r - 1$,
4. $r' = 2(k-1)$,
5. svaki par točaka incidentan je s točno $(k-1)$ ili 0 blokova,
6. svaki par blokova incidentan je s točno $(r-1)$ ili 1 točkom.

Korolar

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ (v, k, λ) blok dizajn. Tada su $\overline{\mathcal{D}}_2$ i $\mathcal{D}_2$ simetrični ako i samo ako je $k = (r+1)/2$.