

*Jednostavne grupe kao grupe automorfizama
primitivnih dizajna*

Vedrana Mikulić (vmikulic@math.uniri.hr)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

24. listopada 2008.

Dizajni

Struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je $t - (v, k, \lambda)$ dizajn ako vrijedi:

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa \mathcal{B} incidentan je s točno k elemenata skupa \mathcal{P} ,
3. svakih t elemenata skupa \mathcal{P} incidentno je s točno λ elemenata skupa \mathcal{B} .

$2 - (v, k, \lambda)$ dizajn naziva se blok dizajn.

$t - (v, k, \lambda)$ dizajn takav da je $v = b$ naziva se simetričan dizajn.

Simetričan dizajn s parametrima $2 - (n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ naziva se projektivna ravnina reda n .

Puna grupa automorfizama dizajna \mathcal{D} je grupa svih bijektivnih preslikavanja koja preslikavaju skup točaka na skup točaka i skup blokova na skup blokova te čuvaju incidenciju.

Neka su x i y nenegativni cijeli brojevi. Kvazisimetričan blok dizajn je blok dizajn takav da presjek svaka dva bloka tog dizajna sadrži x ili y točaka.

Struktura $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je semi-simetričan $2 - (v, k, (\lambda))$ dizajn ako vrijedi sljedeće:

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. svaki element skupa \mathcal{B} incidentan je s točno k elemenata skupa \mathcal{P} ,
3. svaki element skupa \mathcal{P} incidentan je s točno k elemenata skupa \mathcal{B} ,
4. svaki par elemenata skupa \mathcal{P} incidentan je s 0 ili λ elemenata skupa \mathcal{B} .

Polaritet dizajna

Dualitet dizajna $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ je izomorfizam dizajna \mathcal{D} i njegove dualne strukture \mathcal{D}^* .

Dualitet zadajemo parom bijektivnih preslikavanja, $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{B}$ i $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{P}$, tako da je $x \in B \Leftrightarrow g(B) \in f(x)$. Par preslikavanja $gf : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ i $fg : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ je automorfizam dizajna \mathcal{D} .

Dualitet za koji je taj automorfizam trivijalan naziva se polaritet.

Točka $x \in \mathcal{P}$ naziva se apsolutna točka polariteta ako je x sadržana u svojoj slici $f(x)$. Analogno, blok B je apsolutni blok ako sadrži svoju sliku $g(B)$.

Propozicija

Dizajn \mathcal{D} dopušta polaritet ako i samo ako je izomorfan dizajnu čija je matrica incidencije simetrična.

Grafovi

Neka je $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{I})$ graf sa n vrhova. Graf \mathcal{G} je jako regularan graf s parametrima (n, k, λ, μ) , uz oznaku $SRG(n, k, \lambda, \mu)$, ako vrijedi:

1. \mathcal{G} je jednostavan k -regularan graf,
2. svaka dva susjedna vrha imaju točno λ zajedničkih susjednih vrhova,
3. svaka dva nesusedna vrha imaju točno μ zajedničkih susjednih vrhova.

Automorfizam grafa je bijekcija na skupu vrhova \mathcal{V} koja čuva susjednost.

Dizajni i grafovi

Neka je $\mathcal{D} 2 - (v, k, \lambda)$ dizajn.

Ako je matrica incidencije \mathbf{M} dizajna \mathcal{D} simetrična matrica u kojoj su svi elementi na dijagonali jednaki nuli, tada je \mathbf{M} matrica susjedstva jako regularnog grafa s parametrima (v, k, λ, λ) .

Ako je matrica incidencije \mathbf{M} simetrična matrica u kojoj su svi elementi na dijagonali jednaki jedan, onda je $\mathbf{M} - \mathbf{I}$, gdje je \mathbf{I} jedinična matrica, matrica susjedstva jako regularnog grafa s parametrima $(v, k - 1, \lambda - 2, \lambda)$.

Neka je \mathcal{D} kvazisimetričan dizajn i neka su x i y ($x < y$) kardinalnosti presjeka blokova dizajna \mathcal{D} .

Blok graf dizajna \mathcal{D} je graf kojemu su vrhovi predstavljeni blokovima dizajna \mathcal{D} i dva su vrha susjedna ako i samo ako presjek pripadnih blokova sadrži y točaka.

Teorem

Blok graf kvazisimetričnog blok dizajna je jako regularan graf.

- ▶ blok graf 2 – $(v, k, 1)$ dizajna

Neka je $\mathcal{D} 2 - (v, k, \lambda)$ dizajn i neka su kardinaliteti presjeka blokova elementi skupa $S = \{n_1, n_2, \dots, n_m\} \subseteq \mathbb{N}_0$.

Neka je \mathcal{G} graf čiji su vrhovi predstavljeni blokovima dizajna \mathcal{D} , a dva su vrha susjedna ako i samo ako je kardinalitet presjeka pripadnih blokova element skupa $S' = \{n_{i_1}, \dots, n_{i_l}\} \subseteq S$. Tako definirani graf, općenito, ne mora biti jako regularan graf.

Opisani poopćeni blok graf označava se sa $\mathcal{G}(\mathcal{D}, S, S')$.

Key, Moori: Codes, Designs and Graphs from the Janko Groups J_1 and J_2 , J. Combin. Math. Combin. Comput. 40 (2002), 143-159.

Teorem (KM)

Neka je Ω n -člani skup, α element skupa Ω i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skup Ω . Neka je $\Delta \neq \{\alpha\}$, orbita za djelovanje stabilizatora G_α na neki element $\beta \in \Omega$, $\Delta = \{g.\beta \mid g \in G_\alpha\}$. Tada je

- (1) $\mathcal{B} = \{g.\Delta \mid g \in G\}$ n -člani skup blokova simetričnog samodualnog $1 - (n, |\Delta|, |\Delta|)$ dizajna na kojega grupa G primitivno djeluje kao grupa automorfizama,
- (2) za $\delta \in \Delta$, skup $\mathcal{E} = \{g.\{\alpha, \delta\} \mid g \in G\}$ je skup bridova povezanog $|\Delta|$ -regularnog grafa sa n vrhova na kojega grupa G primitivno djeluje kao grupa automorfizama.

D. Crnković, V. Mikulić: Unitals, projective planes and other combinatorial structures constructed from the unitary groups $U(3, q)$, $q = 3, 4, 5, 7$, Ars Combin., prihvaćen za objavljivanje

Teorem (CM)

Neka je Ω_1 m -člani skup, Ω_2 n -člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2 . Neka je α element skupa Ω_1 , δ element skupa Ω_2 , Δ_1 orbita za djelovanje stabilizatora G_δ na element α i Δ_2 orbita za djelovanje stabilizatora G_α na element δ .

- (1) Ako je $\Delta_2 = \Omega_2$, onda je skup $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup blokova $1 - (n, n, 1)$ dizajna.*
- (2) Ako je $\Delta_2 \subset \Omega_2$, onda je $\mathcal{B} = \{g.\Delta_2 \mid g \in G\}$ skup od m blokova $1 - (n, |\Delta_2|, |\Delta_1|)$ dizajna.*

Grupa G djeluje primitivno na opisane dizajne.

Teorem

Neka je Ω_1 m -člani skup, Ω_2 n -člani skup i neka je G konačna grupa koja djeluje primitivno na skupove Ω_1 i Ω_2 . Neka je α element skupa Ω_1 , $\delta_1, \dots, \delta_s$ elementi skupa Ω_2 i

$$\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^s G_{\alpha} \cdot \delta_i$$

uz uvjet da $\Delta_2 \neq \Omega_2$. Tada je $\mathcal{B} = \{g \cdot \Delta_2 \mid g \in G\}$ skup od m blokova

$$1 - (n, |\Delta_2|, \sum_{i=1}^s |G_{\delta_i} \cdot \alpha|)$$

dizajna na kojega grupa G djeluje primitivno kao grupa automorfizama.

- ▶ G jednostavna grupa
- ▶ H_1 i H_2 maksimalne podgrupe
- ▶ $\Omega_1 = ccl_G H_1$ i $\Omega_2 = ccl_G H_2$
- ▶ $\Delta_2 = \bigcup_{i=1}^s ccl_{K_i} H_2$ za neke $K_i \in ccl_G H_1$

Relaciju incidencije:

$$(H_2^{g_i}, H_1^{h_j}) \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^s (H_2^{g_i} \cap H_1^{h_j} \cong G_k),$$

gdje su grupe G_k neke od mogućih presjeka grupa $H_1^{g_i}$ i $H_2^{h_j}$.
Oznaka: $\mathcal{D}(G, H_2, H_1; G_1, \dots, G_s)$.

Na sličan način konstruiramo i regularan graf iz skupa $\Omega = ccl_G K$, ako je K maksimalna podgrupa jednostavne grupe G .

Elementima klase $ccl_G K$ možemo predstaviti vrhove regularnog grafa. Taj graf ima $[G : K]$ vrhova i svaki vrh je stupnja

$|\Delta| = |\bigcup_{i=1}^s ccl_{K_i} K|$ za neke $K_i \in ccl_G K$.

Relacija susjedstva:

$$(K^{g_i}, K^{g_j}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \bigvee_{k=1}^s (K^{g_i} \cap K^{g_j} \cong G_k),$$

gdje su G_k neke od mogućih grupa presjeka elemenata klase $ccl_G K$.

Oznaka: $\mathcal{G}(G, K; G_1, .. G_s)$.

O grupi automorfizama i izomorfnim dizajnim

Neka je G grupa, $f \in \text{Aut}G$ i neka su H i K maksimalne podgrupe grupe G . Tada je:

- ▶ $\mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s) \cong \mathcal{D}(G, f(H), f(K); G_1, \dots, G_s)$,
- ▶ $\mathcal{G}(G, H; G_1, \dots, G_s) \cong \mathcal{G}(G, f(H); G_1, \dots, G_s)$.

Ako su klase izomorfности maksimalnih podgrupa H i K u G jednake klasama konjugiranosti tih podgrupa u G , onda je

$$\text{Aut}G \leq \text{Aut}\mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s).$$

Ako postoji $f \in \text{Aut}G$ i podgrupa H' takva da je $f(H') = H$, ali da H i H' nisu konjugirani u G , onda vrijedi:

- ▶ $G \cong \text{Int}G \leq \text{Aut}\mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s)$,
- ▶ $\text{Aut}G \not\leq \text{Aut}\mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s)$.

Ako $f \in \text{Aut}G$ nije automorfizam dizajna $\mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s)$, onda je

$$\mathcal{D}(G, f(H), f(K); G_1, \dots, G_s) \cong \mathcal{D}(G, H, K; G_1, \dots, G_s).$$

Konstruirali smo strukture iz sljedećih jednostavnih grupa.

Oznaka	Struktura	Red
G_1	$U(3, 3)$	6048
G_2	$U(4, 2)$	25920
G_3	$U(3, 4)$	62400
G_4	$U(3, 5)$	126000
G_5	$U(5, 2)$	13685760
G_6	$U(4, 3)$	3265920
G_7	$L(3, 5)$	372000
G_8	$L(2, 32)$	32736
G_9	$L(2, 49)$	58800
G_{10}	$L(4, 3)$	6065280

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(3, 5)$

Grupa $G_7 \cong L(3, 5)$ je jednostavna grupa reda 372000 koja ima pet klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{7,1}$	$E_{25} : GL(2, 5)$	12000	31
$M_{7,2}$	$E_{25} : GL(2, 5)$	12000	31
$M_{7,3}$	S_5	120	3100
$M_{7,4}$	$(Z_4 \times Z_4) : S_3$	96	3875
$M_{7,5}$	F_{93}	93	4000

Presjeci elemenata klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa su:

- ▶ $P_{7,1,2}^1 \cong (Z_2 \cdot A_5) : Z_4$, $P_{7,1,2}^2 \cong (E_{25} \cdot Z_5) : (Z_4 \times Z_4)$,
- ▶ $P_{7,i,3}^1 \cong D_8$, $P_{7,i,3}^2 \cong D_{12}$, $P_{7,i,3}^3 \cong Z_5 : Z_4$, za $i = 1, 2$,
- ▶ $P_{7,i,4}^1 \cong S_3$, $P_{7,i,4}^2 \cong Z_2 \times Z_4$, $P_{7,i,4}^3 \cong (Z_8 : Z_2) : Z_2$, za $i = 1, 2$.

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_{17}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,2}; P_{7,1,2}^2)$	$2 - (31, 6, 1)$	744000	$L(3, 5) : Z_2$
\mathcal{D}_{18}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,1}; P_{7,1,2}^2)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P_{7,1,3}^3)$	$2 - (31, 6, 100)$	372000	$L(3, 5)$
\mathcal{D}_{19}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P_{7,2,3}^3)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P_{7,1,3}^2)$	$2 - (31, 10, 300)$	372000	$L(3, 5)$
\mathcal{D}_{20}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P_{7,2,3}^2)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,3}; P_{7,1,3}^1)$	$2 - (31, 15, 700)$	372000	$L(3, 5)$
\mathcal{D}_{21}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,3}; P_{7,2,3}^1)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P_{7,1,4}^3)$	$2 - (31, 3, 25)$	372000	$L(3, 5)$
\mathcal{D}_{22}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P_{7,2,4}^3)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P_{7,1,4}^2)$	$2 - (31, 12, 550)$	372000	$L(3, 5)$
\mathcal{D}_{23}	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P_{7,2,4}^2)$ $\mathcal{D}(G_7, M_{7,1}, M_{7,4}; P_{7,1,4}^1)$	$2 - (31, 15, 875)$	372000	$L(3, 5)$
	$\mathcal{D}(G_7, M_{7,2}, M_{7,4}; P_{7,2,4}^1)$			

Primjer u programskom paketu GAP

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3, 3)$

Jednostavna grupa $G_1 \cong U(3, 3)$ ima četiri maksimalne podgrupe, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{1,1}$	$(E_9 : Z_3) : Z_8$	216	28
$M_{1,2}$	$L(2, 7)$	168	36
$M_{1,3}$	$(Z_4 \times Z_4) : S_3$	96	63
$M_{1,4}$	$Z_4 \cdot S_4$	96	63

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_1	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,4}; P_{1,1,4}^2)$	$2 - (28, 4, 1)$	12096	$U(3, 3) : Z_2$
\mathcal{D}_2	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,3}, M_{1,3}; P_{1,3,3}^1, P_{1,3,3}^2, P_{1,3,3}^4)$	$2 - (63, 31, 15)$	20158709760	$PGL(6, 2)$
\mathcal{D}_3	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,4}, M_{1,4}; P_{1,4,4}^1, P_{1,4,4}^3, P_{1,4,4}^4)$	$2 - (63, 31, 15)$	12096	$U(3, 3) : Z_2$
\mathcal{D}_4	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,2}, M_{1,2}; P_{1,2,2}^1, P_{1,2,2}^3)$	$2 - (36, 15, 6)$	12096	$U(3, 3) : Z_2$
\mathcal{D}_5	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,3}; P_{1,1,3}^1)$	$2 - (28, 12, 11)$	1451520	$PSp(6, 2)$
\mathcal{D}_6	$\mathcal{D}(G_1, M_{1,2}, M_{1,3}; P_{1,2,3}^2)$	$2 - (36, 16, 12)$	1451520	$PSp(6, 2)$
\mathcal{G}_1	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,2}; P_{1,2,2}^3)$	$(36, 14, 4, 6)$	12096	$U(3, 3) : Z_2$
\mathcal{G}_2	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,3}; P_{1,3,3}^2, P_{1,3,3}^4)$	$(63, 30, 13, 15)$	1451520	$PSp(6, 2)$
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_5, \{4, 6\}, \{6\})$			
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_6, \{6, 8\}, \{6\})$			
\mathcal{G}_3	$\mathcal{G}(G_1, M_{1,4}; P_{1,4,4}^3, P_{1,4,4}^4)$	$(63, 30, 13, 15)$	12096	$U(3, 3) : Z_2$
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_1, \{0, 1\}, \{1\})$			

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(4, 2)$

Grupa $G_2 \cong U(4, 2)$ je izomorfna projektivnoj simpletičkoj grupi $PSp(4, 3)$. Red grupe G_2 je 25920. Grupa G_2 ima, do na konjugaciju, pet klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{2,1}$	$E_{16} : A_5$	960	27
$M_{2,2}$	S_6	720	36
$M_{2,3}$	$E_{27} : S_4$	648	40
$M_{2,4}$	$(E_9 : Z_3) : SL(2, 3)$	648	40
$M_{2,5}$	$Z_2 \cdot (A_4 \times A_4) \cdot Z_2$	576	45

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_7	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,2}, M_{2,2}; P_{2,2,2}^2)$	$2 - (36, 15, 6)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{D}_8	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,3}, M_{2,3}; P_{2,3,3}^2, P_{2,3,3}^3)$	$2 - (40, 13, 4)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{D}_9	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,4}, M_{2,4}; P_{2,4,4}^2, P_{2,4,4}^3)$	$2 - (40, 13, 4)$	12130560	$PGL(4, 3)$
\mathcal{D}_{10}	$\mathcal{D}(G_2, M_{2,5}, M_{2,5}; P_{2,5,5}^2)$	$2 - (45, 12, 3)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_4	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,1}; P_{2,1,1}^2)$	$(27, 10, 1, 5)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_5	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,2}; P_{2,2,2}^2)$	$(36, 15, 6, 6)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_6	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,3}; P_{2,3,3}^2)$	$(40, 12, 2, 4)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_7	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,4}; P_{2,4,4}^2)$	$(40, 12, 2, 4)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_8	$\mathcal{G}(G_2, M_{2,5}; P_{2,5,5}^2)$	$(45, 12, 3, 3)$	51840	$U(4, 2) : Z_2$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3, 4)$

Unitarna grupa $G_3 \cong U(3, 4)$ je jednostavna grupa reda 62400 koja ima četiri klase konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{3,1}$	$(E_{16} : E_4) : Z_{15}$	960	65
$M_{3,2}$	$A_5 \times Z_5$	300	208
$M_{3,3}$	$E_{25} : S_3$	150	416
$M_{3,4}$	$Z_{13} : Z_3$	39	1600

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_{11}	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,2}; P_{3,1,2}^1)$	$2 - (65, 5, 1)$	249600	$U(3, 4) : Z_4$
\mathcal{D}_{12}	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,3}; P_{3,1,3}^2)$	$2 - (65, 15, 21)$	249600	$U(3, 4) : Z_4$
\mathcal{D}_{13}	$\mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,4}; P_{3,1,4}^2)$	$2 - (65, 26, 250)$	249600	$U(3, 4) : Z_4$
\mathcal{G}_9	$\mathcal{G}(G_3, M_{3,2}; P_{3,2,2}^2)$	$(208, 75, 30, 25)$	249600	$U(3, 4) : Z_4$
\mathcal{G}_{10}	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_{11}, \{0, 1\}, \{1\})$	$(416, 100, 36, 20)$	503193600	$G(2, 4) : Z_2$
	$\mathcal{G}(G_3, M_{3,3}; P_{3,3,3}^4)$			
	$\mathcal{G}(\mathcal{D}_{12}, \{2, 3, 5\}, \{3\})$			

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(3, 5)$

Grupa $G_4 \cong U(3, 5)$ je jednostavna grupa reda 126000 koja ima osam maksimalnih podgrupa, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{4,1}$	A_7	2520	50
$M_{4,2}$	A_7	2520	50
$M_{4,3}$	A_7	2520	50
$M_{4,4}$	$(E_{25} : Z_5) : Z_8$	1000	126
$M_{4,5}$	$A_6 \cdot Z_2$	720	175
$M_{4,6}$	$A_6 \cdot Z_2$	720	175
$M_{4,7}$	$A_6 \cdot Z_2$	720	175
$M_{4,8}$	$Z_2 \cdot A_5 \cdot Z_2$	240	525

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_{14}	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,1}, M_{4,5}; P_{4,1,5}^1, P_{4,1,5}^2)$ $\mathcal{D}(G_4, M_{4,2}, M_{4,6}; P_{4,2,6}^1, P_{4,2,6}^2)$ $\mathcal{D}(G_4, M_{4,3}, M_{4,7}; P_{4,3,7}^1, P_{4,3,7}^2)$	$2 - (50, 14, 13)$	252000	$U(3, 5) : Z_2$
\mathcal{D}_{15}	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,8}; P_{4,4,8}^2)$	$2 - (126, 6, 1)$	756000	$U(3, 5) : S_3$
\mathcal{D}_{16}	$\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,5}; P_{4,4,5}^2)$ $\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,6}; P_{4,4,6}^2)$ $\mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,7}; P_{4,4,7}^2)$	$2 - (126, 36, 14)$	252000	$U(3, 5) : Z_2$
\mathcal{G}_{11}	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,1}; P_{4,1,1}^2)$ $\mathcal{G}(G_4, M_{4,2}; P_{4,2,2}^2)$ $\mathcal{G}(G_4, M_{4,3}; P_{4,3,3}^2)$	$(50, 7, 0, 1)$	252000	$U(3, 5) : Z_2$
\mathcal{G}_{12}	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,5}; P_{4,5,5}^2)$ $\mathcal{G}(G_4, M_{4,6}; P_{4,6,6}^2)$ $\mathcal{G}(G_4, M_{4,7}; P_{4,7,7}^2)$ $\mathcal{G}(\mathcal{D}_{14}, \{3, 4, 8\}, \{3\})$ $\mathcal{G}(\mathcal{D}_{16}, \{6, 10, 11\}, \{11\})$	$(175, 72, 20, 36)$	252000	$U(3, 5) : Z_2$
\mathcal{G}_{13}	$\mathcal{G}(G_4, M_{4,8}; P_{4,8,8}^2)$ $\mathcal{G}(D_{15}, \{0, 1\}, \{1\})$	$(525, 144, 48, 36)$	756000	$U(3, 5) : S_3$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(5, 2)$

Grupa $G_5 \cong U(5, 2)$ je jednostavna grupa reda 13685760 koja ima, do na konjugaciju, šest maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{5,1}$	$(E_{64} : Z_2).(E_9 : Z_3).SL(2, 3)$	829444	165
$M_{5,2}$	$Z_3 \times U(4, 2)$	46080	176
$M_{5,3}$	$(E_{16} : E_{16}) : (Z_3 \times A_5)$	77760	297
$M_{5,4}$	$E_{81} : S_5$	9720	1408
$M_{5,5}$	$(S_3 \times (E_9 : Z_3)) : SL(2, 3)$	3888	3520
$M_{5,6}$	$L(2, 11)$	660	20736

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{G}_{14}	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,1}; P_{5,1,1}^2)$	(165, 36, 3, 9)	27371520	$U(5, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_{15}	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,2}; P_{5,2,2}^2)$	(176, 40, 12, 8)	27371520	$U(5, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_{16}	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,3}; P_{5,3,3}^2)$	(297, 40, 7, 5)	27371520	$U(5, 2) : Z_2$
\mathcal{G}_{17}	$\mathcal{G}(G_5, M_{5,4}; P_{5,4,4}^2, P_{5,4,4}^3, P_{5,4,4}^4)$	(1408, 567, 246, 216)	18393661440	$Fi_{21} : Z_2$

Strukture konstruirane iz unitarne grupe $U(4, 3)$

Grupa $G_6 \cong U(4, 3)$ je jednostavna grupa reda 3265920. Do na konjugaciju, grupa G_6 ima 16 maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{6,1}$	$E_{81} : A_6$	29160	112
$M_{6,2}$	$U(4, 2)$	25920	126
$M_{6,3}$	$U(4, 2)$	25920	126
$M_{6,4}$	$L(3, 5)$	20160	162
$M_{6,5}$	$L(3, 5)$	20160	162
$M_{6,6}$	$(E_{243}^+ : Q_2) \cdot S_3$	11664	280
$M_{6,7}$	$U(3, 3)$	6048	540
$M_{6,8}$	$E_{16} : A_6$	5760	567
$M_{6,9}$	$E_{16} : A_6$	5760	567
$M_{6,10}$	A_7	2520	1296
$M_{6,11}$	A_7	2520	1296
$M_{6,12}$	A_7	2520	1296
$M_{6,13}$	A_7	2520	1296
$M_{6,14}$	$((E_8 \cdot Z_{12}) : Z_6) : Z_2$	1152	2835
$M_{6,15}$	$A_6 \cdot Z_2$	720	4536
$M_{6,16}$	$A_6 \cdot Z_2$	720	4536

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{G}_{18}	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,1}; P_{6,1,1}^2)$	(112, 30, 2, 10)	26127360	$U(4, 3) : D_4$
\mathcal{G}_{19}	$\mathcal{G}(G_4, M_{6,2}; P_{6,2,2}^2)$	(126, 45, 12, 18)	13063680	$(U(4, 3) : Z_2) : Z_2$
\mathcal{G}_{20}	$\mathcal{G}(G_4, M_{6,3}; P_{6,3,3}^2)$	(162, 56, 10, 24)	13063680	$(U(4, 3) : Z_2) : Z_2$
	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,4}; P_{6,4,4}^1)$			
\mathcal{G}_{21}	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,5}; P_{6,5,5}^1)$	(280, 36, 8, 4)	26127360	$U(4, 3) : D_4$
	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,6}; P_{6,6,6}^2)$			
\mathcal{G}_{22}	$\mathcal{G}(G_6, M_{6,7}; P_{6,7,7}^2)$	(540, 224, 88, 96)	26127360	$U(4, 3) : D_4$

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(2, 32)$

Grupa G_8 je jednostavna grupa reda 32736 koja ima tri maksimalne podgrupe, do na konjugaciju.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{8,1}$	$E_{32} : Z_{31}$	992	33
$M_{8,2}$	D_{33}	66	496
$M_{8,3}$	D_{31}	62	528

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{G}_{23}	$\mathcal{G}(G_8, M_{8,3}; P_{8,3,3}^1)$	(528, 62, 31, 4)	33!	S_{33}

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(2, 49)$

Jednostavna linearna grupa $G_9 \cong L(2, 49)$ ima 58800 elemenata i, do na konjugaciju, sedam maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{9,1}$	$E_{49} : Z_{24}$	1176	50
$M_{9,2}$	$PGL(2, 7)$	336	175
$M_{9,3}$	$PGL(2, 7)$	336	175
$M_{9,4}$	A_5	60	980
$M_{9,5}$	A_5	60	980
$M_{9,6}$	D_{25}	50	1176
$M_{9,7}$	D_{24}	48	1225

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_{24}	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,2}; P_{9,1,2}^1)$	$2 - (50, 8, 4)$	117600	$L(2, 49) : Z_2$
\mathcal{D}_{25}	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,3}; P_{9,1,3}^1)$	$2 - (50, 20, 152)$	117600	$L(2, 49) : Z_2$
	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,4}; P_{9,1,4}^2)$			
	$\mathcal{D}(G_9, M_{9,1}, M_{9,5}; P_{9,1,5}^2)$			

Strukture konstruirane iz linearne grupe $L(4, 3)$

Grupa $G_{10} \cong L(4, 3)$ je jednostavna grupa reda 6065280 koja ima, do na konjugaciju, osam klasa konjugiranosti maksimalnih podgrupa.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{10,1}$	$E_{27} : L(3, 3)$	151632	40
$M_{10,2}$	$E_{27} : L(3, 3)$	151632	40
$M_{10,3}$	$U(4, 3) : Z_2$	51840	117
$M_{10,4}$	$U(4, 3) : Z_2$	51840	117
$M_{10,5}$	$(E_8 : SL(2, 3)) : S_4$	46656	130
$M_{10,6}$	$A_6 : D_4$	2880	2106
$M_{10,7}$	$A_6 : Z_2$	720	8424
$M_{10,8}$	$S_4 : S_4$	567	10530

\mathcal{D}	Konstrukcija	Parametri	$ \text{Aut}\mathcal{D} $	$\text{Aut}\mathcal{D}$
\mathcal{D}_9	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,1}, M_{10,2}; P_{10,1,2}^1)$	$2 - (40, 13, 4)$	12130560	$PGL(4, 3)$
\mathcal{D}_{26}	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,1}, M_{10,5}; P_{10,1,5}^1)$	$2 - (40, 13, 1)$	12130560	$L(4, 3) : Z_2$
\mathcal{G}_{24}	$\mathcal{D}(G_{10}, M_{10,2}, M_{10,5}; P_{10,2,5}^1)$ $\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,3}; P_{10,3,3}^2)$	$(117, 36, 15, 9)$	12130560	$L(4, 3) : Z_2$
\mathcal{G}_{25}	$\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,4}; P_{10,4,4}^2)$ $\mathcal{G}(G_{10}, M_{10,5}; P_{10,5,5}^2)$ $\mathcal{G}(D_{26}, \{0, 1\}, \{1\})$	$(130, 48, 20, 16)$	24261120	$L(4, 3) : E_4$

- ▶ $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(G_1, M_{1,1}, M_{1,4}; P_{1,1,4}^2)$ je unital s parametrima $2 - (28, 4, 1)$ konstruiran iz jednostavne grupe $G_1 \cong U(3, 3)$.
- ▶ $\mathcal{S}_1 = \mathcal{D}(G_1, M_{1,4}, M_{1,4}; Z_4 \times Z_4)$ je semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (63, 6, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\text{Aut}G_1$.

Neka je \mathbf{U}_1 matrica incidencije unitala \mathcal{D}_1 i neka je \mathbf{S}_1 matrica incidencije semi-simetričnog dizajna \mathcal{S}_1 . Tada je

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{28} & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1^T & \mathbf{S}_1 \end{bmatrix}$$

matrica incidencije simetričnog dizajna s parametrima $2 - (91, 10, 1)$. Taj dizajn je Desarguesova projektivna ravnina $PG(2, 9)$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $PGL(3, 9)$.

- ▶ $\mathcal{D}_{11} = \mathcal{D}(G_3, M_{3,1}, M_{3,2}; P_{3,1,2}^1)$ je blok dizajna s parametrima $2 - (65, 5, 1)$ konstruiran iz jednostavne unitarne grupe $G_3 \cong U(3, 4)$.
- ▶ $\mathcal{S}_2 = \mathcal{D}(G_3, M_{3,2}, M_{3,2}; P_{3,2,2}^3)$ je semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (208, 12, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\text{Aut}G_3$.

Matrica

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{65} & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2^T & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix},$$

gdje je \mathbf{U}_2 matrica incidencije dizajna \mathcal{D}_{11} i \mathbf{S}_2 matrica incidencije strukture \mathcal{S}_2 , je matrica incidencije simetričnog dizajna s parametrima $2 - (273, 17, 1)$. Taj dizajn je Desarguesova projektivna ravnina $PG(2, 16)$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $P\Gamma L(3, 16)$.

- ▶ $\mathcal{D}_{15} = \mathcal{D}(G_4, M_{4,4}, M_{4,8}; P_{4,4,8}^2)$ konstruiran iz jednostavne grupe $G_4 \cong U(3, 5)$ je unital s parametrima $2 - (126, 6, 1)$.
- ▶ $\mathcal{S}_3 = \mathcal{D}(G_4, M_{4,8}, M_{4,8}; P_{4,8,8}^3)$ je semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (525, 20, (1))$. Puna grupa automorfizama strukture \mathcal{S}_3 je izomorfna grupi $\text{Aut}G_4$.

Neka je \mathbf{U}_3 matrica incidencije dizajna \mathcal{D}_{15} i neka je \mathbf{S}_3 matrica incidencije semi-simetričnog dizajna \mathcal{S}_3 . Tada je

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{126} & \mathbf{U}_3 \\ \mathbf{U}_3^T & \mathbf{S}_3 \end{bmatrix}$$

matrica incidencije Desarguesove projektivne ravnine $PG(2, 25)$, odnosno simetričnog $2 - (651, 26, 1)$ dizajna. Puna grupa automorfizama te projektivne ravnine je izomorfna grupi $PGL(3, 25)$.

Grupa $G_{11} \cong U(3, 7)$ je jednostavna grupa reda 5663616.

Maksimalna podgrupa	Struktura podgrupe	Red podgrupe	Indeks podgrupe
$M_{11,1}$	$(E_{49} : Z_7) : Z_{48}$	16464	344
$M_{11,2}$	$Z_2 \cdot (L(2, 7) \times Z_4) \cdot Z_2$	2688	2107
$M_{11,3}$	$(Z_8 \times Z_8) : S_3$	384	14749
$M_{11,4}$	$L(2, 7) : Z_2$	168	33712
$M_{11,5}$	$Z_{43} : Z_3$	129	43904

- ▶ Struktura $\mathcal{D}_{27} = \mathcal{D}(G_{11}, M_{11,1}, M_{11,2}; P_{11,1,2}^1)$ je unital s parametrima $2 - (344, 8, 1)$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\text{Aut}G_{11} \cong U(3, 7) : Z_2$.
- ▶ Struktura $\mathcal{S}_4 = \mathcal{D}(G_{11}, M_{11,2}, M_{11,2}; P_{11,2,2}^3)$ je semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (2107, 42, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\text{Aut}G_{11}$.

Matrica

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{344} & \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_4^T & \mathbf{S}_4 \end{bmatrix},$$

gdje je \mathbf{U}_4 matrica incidencije unitala \mathcal{D}_{27} i \mathbf{S}_4 je matrica incidencije semi-simetričnog dizajna \mathcal{S}_4 , je matrica incidencije Desarguesove projektivne ravnine $PG(2, 49)$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $P\Gamma L(3, 49)$.

Hipoteza

Iz konjugacijskih klasa maksimalnih podgrupe jednostavne grupe $U(3, q)$, gdje je $q = p^n$ za p prost broj i n prirodan broj, se može konstruirati hermitski unital s parametrima $2 - (q^3 + 1, q + 1, 1)$ čija je puna grupa automorfizma izomorfna grupi $\text{Aut}U(3, q)$, semi-simetričan dizajn s parametrima $2 - (q^4 - q^3 + q^2, q^2 - q, (1))$ čija je puna grupa automorfizama izomorfna grupi $\text{Aut}U(3, q)$ te Desarguesova projektivna ravnina $PG(2, q^2)$ na opisani način.

- ▶ Zašto su neki 1–dizajni konstruirani opisanom metodom ujedno i 2–dizajni?
- ▶ Zašto su neki regularni grafovi konstruirani opisanom metodom ujedno i jako regularni?
- ▶ Možemo li oslabiti pretpostavke teorema konstrukcije?
- ▶ Možemo li iz svake unitarne grupe $U(3, q)$ konstruirati projektivnu ravninu na opisani način?
- ▶ konstrukcija kodova iz primitivnih grupa