Dvostruko regularni digrafovi i simetrični dizajni

Nina Mavrović

(27.01.2012.)

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

Literatura

Yury J. Ionin and Hadi Kharaghani:

"Doubly regular digraphs and symmetric designs"

Journal of Combinatorial Theory, Series A 101 (2003) 35-48

Sadržaj

Sadržaj

Digrafovi

Definicija 1.1

Digraf je uređeni par $\Gamma = (V, E)$, gdje je:

- V konačan neprazan skup **vrhova**,
- E skup **lukova** tj. uređenih parova $(x, y) \in V^2$, $x \neq y$.

Ako je (x, y) luk, kažemo da x **dominira** nad y ili da je y **dominiran** sa x.

Definicija 1.2

Digraf Γ je ***regularan stupnja*** k ako svaki vrh od Γ dominira nad k vrhova i dominiran je sa k vrhova.

Dvostruko regularni asimetrični digrafovi

Definicija 1.3

Digraf s v vrhova je ***dvostruko regularan*** s parametrima (v, k, λ) ako je regularan stupnja k i za svaka 2 $\neq$ vrha x i y $\Rightarrow$

- broj vrhova koji dominiraju i nad x i y je jednak λ,
- broj vrhova koji su dominirani i sa x i sa y je λ.

Definicija 1.4

Digraf Γ je ***asimetričan*** ako: $(x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \notin E$.

Dvostruko regularan asimetričan digraf s parametrima (v, k, λ) označavamo sa $DRAD(v, k, \lambda)$.

Simetrični dizajni

Definicija 1.5

Simetričan (v, k, λ)***-dizajn*** je par $D = (X, \mathcal{B})$, gdje je:

- X skup od v **točaka**
- $\mathcal{B}$ skup od v **blokova**, tj. k-članih podskupova od X
- svaki 2-člani podskup od X sadržan u točno λ blokova.

Simetrični dizajni

Definicija 1.6

Neka je $X = \{x_1, ..., x_v\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_v\}$. ***Matrica incidencije*** dizajna D je matrica $A = [a_{ij}]$ reda v t.d. $a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in B_j \\ 0, & x_i \notin B_j \end{cases}$.

Teorem 1.7

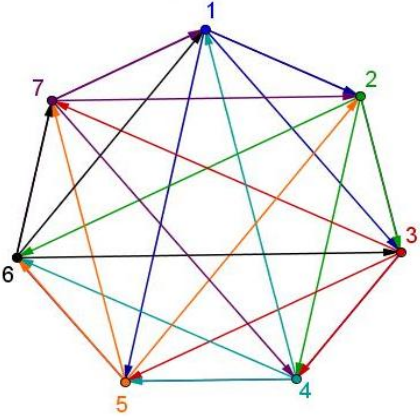
Matrica N reda v s elementima iz $\{0, 1\}$ je matrica incidencije sim. (v, k, λ)-dizajna $\Leftrightarrow NN^t = (k - \lambda)I + \lambda J$.

Veza simetričnih dizajna i digrafova:

Teorem 1.8

Neka je N matrica incidencije sim. (v, k, λ)-dizajna t.d. je $N + N^t$ $(0, 1)$-matrica. Tada je N matrica susjedstva za $DRAD(v, k, \lambda)$ i obratno.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Veza simetričnih dizajna i digrafova

Definicija 1.9

Hadamardova matrica je matrica H reda n sa elementima iz $\{1, -1\}$ za koju je $HH^T = nI$.
Hadamardova matrica je **kosa (skew)** ako je $H + H^t = 2I$.

Hadamardovi turniri

Hadamardov turnir je $DRAD(4n-1, 2n-1, n-1)$.

Takav turnir postoji $\Leftrightarrow$ postoji **kosa Hadamardova matrica** reda $4n$.

Veza simetričnih dizajna i digrafova

- dizajni blizanci (*twin designs*)

Simetrični (v, k, λ) dizajni $D = (X, \mathcal{B})$ i $D' = (X, \mathcal{B}')$ su ***dizajni blizanci*** ako postoji bijekcija $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ t.d. je svaki blok $B \in \mathcal{B}$ disjunktan sa $f(B)$.

Vrijedi:

Neka je:

- Γ $DRAD(v, k, \lambda)$,
- Γ' digraf koji se dobije promjenom smjera svakog luka od Γ.

Tada su odgovarajući simetrični dizajni **blizanci**.

Sadržaj

Sadržaj

2.1 Konstrukcija *DRAD*-a iz projektivne ravnine

Nap. 2.1

Za q potenciju prostog broja, ***projektivna ravnina*** reda q je simetričan $(q^2+q+1, q+1, 1)$-dizajn.

Vrijedi:

Sim. dizajn s tim parametrima može se dobiti iz ***Singerovog diferencijskog skupa***.

2.1 Konstrukcija *DRAD*-a iz projektivne ravnine

Definicija 2.2

Neka je $(G, +)$ konačna grupa reda v i $k, \lambda \in \mathbb{N}$ t.d. $2 \leq k < v$. k-člani podskup $D \subseteq G$ je (v, k, λ)-***diferencijski skup*** u G ako:

- multiskup $\{x - y : x, y \in D, x \neq y\}$ sadrži svaki element iz $G \setminus \{0\}$ točno λ puta.

Primjer

$D = \{1, 2, 4\}$ je $(7, 3, 1)$-diferencijski skup u $\mathbb{Z}_7$

2.1 Konstrukcija *DRAD*-a iz projektivne ravnine

Definicija 2.3

Neka je q potencija prostog broja. ***Singerov diferencijski skup*** je $(q^2+q+1, q+1, 1)$-diferencijski skup u $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$.

- to je $(q+1)$-člani podskup D grupe $\mathbb{Z}_{q^2+q+1}$ u kojem svaki nenul element grupe ima jedinstvenu reprezentaciju kao razlika 2 elementa iz D
- D Sing. dif. skup $\Rightarrow D+x$ Sing. dif. skup $\forall x \in \mathbb{Z}_{q^2+q+1}$
- daje sim. $(q^2+q+1, q+1, 1)$-dizajn s matricom incid.:

$$S(D) = [s_{ij}],\ s_{ij} = \begin{cases} 1, & i-j \in D \\ 0, & i-j \notin D \end{cases},\ i,j = 1,2,...,q^2+q+1.$$

2.1 Konstrukcija *DRAD*-a iz projektivne ravnine

Teorem 2.4

Za q potenciju prostog broja postoji $DRAD(q^2+q+1, q+1, 1)$.

Dokaz:

- neka je D Singerov diferencijski skup
- naći ćemo $b \in \mathbb{Z}_{q^2+q+1}$ t.d. je $A := S(D-b)$ matrica susjedstva za $DRAD(q^2+q+1, q+1, 1)$

Sadržaj

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Definicija 2.5

Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrica ispunjena s $n \neq$ znakova t.d. se svaki znak pojavljuje točno jednom u svakom retku i svakom stupcu.

Za konstrukciju će nam trebati:

Propozicija 2.6

Za svaki paran $n \in \mathbb{N}$ postoji latinski kvadrat $L = [L(i,j)]$ reda n s elementima $1, 2, ..., n$ takav da:

- $L(i,j) = L(j,i)$ i $L(i,i) = n$ za $i, j = 1, ..., n$.

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Primjer

$$n = 6,\ L = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Definicija 2.7

Simetričan $(4h^2, 2h^2 - h, h^2 - h)$-dizajn zovemo ***Menonov***.

- Takav dizajn možemo dobiti iz **regularne Had. matrice.**

Konstrukcija za *DRAD* s parametrima Menonovog dizajna

- prvo ćemo pomoću Had. matrice K konstruirati skup regularnih Had. matrica Bushovog tipa $\mathcal{H}(K)$
- zatim unutar $\mathcal{H}(K)$ odabrati odgovarajuću matricu H t.d.
  - $A := \frac{1}{2}(J - H)$ bude matrica Menonovog dizajna, a također i matrica susjedstva za *DRAD*

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Definicija 2.8

Hadamardova matrica je ***regularna*** ako ima konstantnu sumu redaka.

Vrijedi: Ako je n suma redaka reg. Had. matrice H reda $> 1 \Rightarrow$

- $n = 2h$ je paran, $4h^2$ je red od H
- $N := \frac{1}{2}(J - H)$ je matrica incidencije simetričnog $(4h^2, 2h^2 - h, h^2 - h)$-dizajna, tj. Menonovog dizajna

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Definicija 2.9

Regularna Hadamardova matrica H reda $4h^2, \ h \geq 1$, je ***Bushovog tipa*** ako se može reprezentirati kao blok matrica $H = [H_{ij}]$, gdje je svaki H_{ij} matrica reda $2h$ sa konstantnom sumom redaka jednakom 0 ili $2h$.

- slijedi da svaki redak ili stupac blokova od H sadrži jednu matricu J i $2h - 1$ matrica sa sumom redaka 0

$\diamondsuit$ Primjer:

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Had. matrice Bushovog tipa iz Had. matrice K

K Had. matrica reda $n \geq 2$ sa jedinicama u zadnjem retku

- $R_1, ..., R_n$ retci od K
- $C_i = R_i^t R_i$, $i = 1, ..., n$. Matrice C_i imaju sljedeća svojstva:

1. simetrične su
2. $C_n = J$
3. $C_i J = 0$ (tj. sume redaka su im jednake 0) za $i = 1, ..., n-1$
4. $C_i C_j^t = 0$ za $i \neq j$, $C_i C_i^t = nC_i$
5. $\sum_{i=1}^{n} C_i = nI$

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Teorem 2.10

Neka je $\mathcal{C} = \{\pm C_1, \pm C_2, ..., \pm C_{n-1}, C_n = J\}$ i neka je $H = [H_{ij}]$, $i, j = 1, ..., n$, blok matrica takva da:

(i) $H_{ij} \in \mathcal{C}$ za $i, j = 1, ..., n$;

(ii) $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}, j \neq k \Rightarrow H_{ij} \pm H_{ik} \neq 0$ i $H_{ji} \pm H_{ki} \neq 0$.

Tada je H **Hadamardova matrica Bushovog tipa**.

Za Had. matricu K reda $n = 2h$ ($h \in \mathbb{N}$) s 1 u zadnjem retku def.:

$\mathcal{H}(K)$ - skup svih Had. matrica Bushovog tipa reda $n^2 = 4h^2$ konstruiranih prethodnim teoremom

2.2 Konstrukcija DRAD-a iz Menonovog dizajna

Teorem 2.11

Ako je $h \in \mathbb{N}$ za koji postoji Had. matrica reda $2h$, tada postoji $DRAD(4h^2, 2h^2 - h, h^2 - h)$.

Dokaz:

L lat. kvadrat reda $n = 2h$ iz prop.2.6. Definiramo $H \in \mathcal{H}(K)$:

$$H = [H_{ij}],\ H_{ij} = \begin{cases} C_k, & L(i,j) = k,\ 1 \leq i \leq j \leq n \\ -C_k, & L(i,j) = k,\ 1 \leq j < i \leq n \end{cases}$$

Tada je $A = \frac{1}{2}(J - H)$ matrica susjedstva za $DRAD(4h^2, 2h^2 - h, h^2 - h)$.

Sadržaj

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

3. konstrukcija koristi sim. dizajne s parametrima **McFarlandovih diferencijskih skupova**:

$$v = q^{d+1}\left(1 + \frac{q^{d-1} - 1}{q-1}\right),\ k = \frac{q^d(q^{d+1} - 1)}{q-1},\ \lambda = \frac{q^d(q^d - 1)}{q-1}$$

gdje je q potencija prostog broja, a $d \in \mathbb{N}$.

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

Prvo uvodimo ***simetričan*** uređaj na konačnoj Abelovoj grupi:

Lema 2.12

Neka je G konačna Abelova grupa. Moguće je urediti elemente od $G = \{x_1, ..., x_n\}$ t.d. je $x_i + x_{n+1-i}$ jednak za $i = 1, ..., n$.

Na dalje pretpostavljamo da je konačna Abelova grupa uvijek opremljena sa simetričnim uređajem.

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

Za podskup A Abelove grupe $G = \{x_1, ..., x_n\}$ definiramo matrice:
$N(A) = [n_{ij}(A)]$, $M(A) = [m_{ij}(A)]$

$$n_{ij}(A) = \begin{cases} 1, & x_j - x_i \in A \\ 0, & x_j - x_i \notin A \end{cases}, \quad m_{ij}(A) = \begin{cases} 1, & x_{n+1-j} - x_i \in A \\ 0, & x_{n+1-j} - x_i \notin A \end{cases}$$

- $M(A)$ je simetrična
- za $A \cap (-A) = \emptyset \ \Rightarrow \ N(A) + N(A)^t$ je (0,1)-matrica

Lema 2.13. Neka su $A, B \subseteq G$. Tada:

i) $M(A)M(B)^t = N(A)N(B)^t$ i (l, m)-ti element ovih matrica je $|(A + x_l) \cap (B + x_m)|$

ii) $M(A)J = N(A)J = |A|J$.

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

Neka je: q potencija prostog broja, $d \in \mathbb{N}$,
V $(d+1)$-dim. vektorski prostor nad poljem $GF(q)$.

Definicija 2.14

Potprostore od V dimenzije d nazivamo ***hiperravnine***, a njihove desne/lijeve klase (***cosets***) nazivamo d**-ravnine** (d***-flats***). Za H hiperravninu i $x, y \in V$ kažemo da su d-flats $H+x$ i $H+y$ ***paralelne***.

- Prostor V sadrži $r = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ hiperravnina.

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

Propozicija 2.15

Neka je $r = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$. Za $i = 1, ..., r$ neka je F_i d-flat (d-ravnina) paralelan s hiperravninom H_i, te $F_{r+1} = \emptyset$. Neka je $L = [L(i,j)]$ latinski kvadrat reda $r+1$. Za $i, j = 1, ..., r+1$ definiramo matrice $M_{ij} = M(F_k)$ i $N_{ij} = N(F_k)$ gdje je $L(i,j) = k$.

Tada su blok matrice $M = [M_{ij}]$ i $N = [N_{ij}]$ matrice incidencije sim. dizajna s parametrima McFarlandovih diferencijskih skupova.

2.3 Konstrukcija iz dizajna s parametrima McFarlandovih dif. skupova

Teorem 2.16

Za bilo koju potenciju prostog broja q i $d \in \mathbb{N}$ postoji *DRAD* s parametrima McFarlandovih diferencijskih skupova.

Dokaz: $H_1, ..., H_r$ hiperravnine u V. Fiksiramo $a_k \in V \setminus H_k, \forall k$.

1. q paran ...
2. q neparan ...