Noviji rezultati o familijama simetričnih dizajna

Nina Mavrović

Odjel za matematiku
Sveučilište u Rijeci

3.12.2010.

Literatura

Mohan S. SHRIKHANDE and Tariq A. ALRAQAD:

- ***Recent results on families of symmetric designs and non-embeddable quasi-residual designs***

Sadržaj

Uvod

Problem konstrukcije beskonačnih familija simetričnih dizajna:

Uvod

Problem konstrukcije beskonačnih familija simetričnih dizajna:

- prve dobivene iz konačnih projektivnih geometrija, Hadamardovih matrica i diferencijskih skupova

Uvod

Problem konstrukcije beskonačnih familija simetričnih dizajna:

- prve dobivene iz konačnih projektivnih geometrija, Hadamardovih matrica i diferencijskih skupova
- 1999. su T.Beth, D. Jungnickel i H.Lenz u djelu "Design Theory" iskombinirali parametre svih tada poznatih simetričnih dizajna u 18 beskonačnih familija, 3 moguće beskonačne familije i nekoliko sporadičnih dizajna

Simetrični dizajni

Definicija 1.1

- $2-(v,k,\lambda)$ dizajn je uređeni par **D**$=(X,\mathcal{B})$, gdje je X skup od v točaka, a $\mathcal{B}$ kolekcija blokova, tj. k-članih podskupova od X, pri čemu je svaki par točaka sadržan u točno λ blokova

Simetrični dizajni

Definicija 1.1

- $2-(v,k,\lambda)$ dizajn je uređeni par **D**$=(X,\mathcal{B})$, gdje je X skup od v točaka, a $\mathcal{B}$ kolekcija blokova, tj. k-članih podskupova od X, pri čemu je svaki par točaka sadržan u točno λ blokova

- drugi naziv: (v,b,r,k,λ) dizajn
  - $b=\frac{vr}{k}$ - broj blokova
  - $r=\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$ - svaka točka sadržana u točno r blokova

Simetrični dizajni

Definicija 1.2

Neka je $X = \{x_1, ..., x_v\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_b\}$. Matrica incidencije od **D** je $v \times b$ matrica $A = [a_{ij}]$, gdje je $a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in B_j, \\ 0, & x_i \notin B_j. \end{cases}$

Simetrični dizajni

Definicija 1.2

Neka je $X = \{x_1, ..., x_v\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, ..., B_b\}$. Matrica incidencije od **D** je $v \times b$ matrica $A = [a_{ij}]$, gdje je $a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in B_j, \\ 0, & x_i \notin B_j. \end{cases}$

Vrijedi:

Matrica A veličine $v \times b$ s elementima iz $\{0, 1\}$ je matrica incidencije (v, b, r, k, λ) dizajna akko

1. $J_v A = k J_{v \times b}$,
2. $AA^T = (r - \lambda) I_v + \lambda J_v$.

Simetrični dizajni

Definicija 1.3

Simetrični (v, k, λ)-dizajn je (v, b, r, k, λ) dizajn za kojega je $v = b$ (što je ekvivalentno sa $r = k$).

Simetrični dizajni

Definicija 1.3

Simetrični (v, k, λ)-dizajn je (v, b, r, k, λ) dizajn za kojega je $v = b$ (što je ekvivalentno sa $r = k$).

- to je (v, v, k, k, λ) dizajn

Simetrični dizajni

Definicija 1.3

Simetrični (v, k, λ)-dizajn je (v, b, r, k, λ) dizajn za kojega je $v = b$ (što je ekvivalentno sa $r = k$).

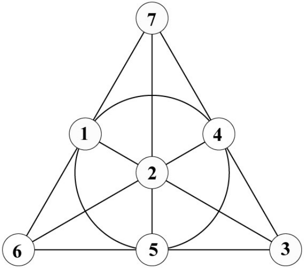
- to je (v, v, k, k, λ) dizajn
- kod njega se svaka 2 različita bloka sijeku u λ točaka

Primjer - Fanova ravnina

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\mathcal{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{4, 5, 1\}, \{5, 6, 3\}, \{6, 7, 1\}, \{7, 2, 5\}\}$

$\Rightarrow$ **D**=$(X, \mathcal{B})$ je simetrični (7,3,1) dizajn



Bruck-Ryser-Chowla (B-R-C) teorem

Teorem 1.4

Neka su v, k, λ cijeli brojevi takvi da je $\lambda(v-1) = k(k-1)$, za koje postoji simetrični (v, k, λ) dizajn. Tada ako je:

1. v paran $\Rightarrow$ $k - \lambda$ kvadrat;
2. v neparan $\Rightarrow$ jednadžba $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$ ima za rješenje $x, y, z \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki 0.

Bruck-Ryser-Chowla (B-R-C) teorem

Teorem 1.4

Neka su v, k, λ cijeli brojevi takvi da je $\lambda(v-1) = k(k-1)$, za koje postoji simetrični (v, k, λ) dizajn. Tada ako je:

1. v paran $\Rightarrow k - \lambda$ kvadrat;
2. v neparan $\Rightarrow$ jednadžba $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$ ima za rješenje $x, y, z \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki 0.

- nisu dovoljni uvjeti za postojanje sim. dizajna

Bruck-Ryser-Chowla (B-R-C) teorem

Teorem 1.4

Neka su v, k, λ cijeli brojevi takvi da je $\lambda(v-1) = k(k-1)$, za koje postoji simetrični (v, k, λ) dizajn. Tada ako je:

1. v paran $\Rightarrow$ $k - \lambda$ kvadrat;
2. v neparan $\Rightarrow$ jednadžba $z^2 = (k-\lambda)x^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$ ima za rješenje $x, y, z \in \mathbb{Z}$ koji nisu svi jednaki 0.

- nisu dovoljni uvjeti za postojanje sim. dizajna
- neriješeni skup parametara sa najmanjim brojem točaka je (81,16,3)

Hadamardove matrice

Definicija 2.1

Hadamardova matrica je matrica H reda n sa elementima iz $\{1, -1\}$ za koju je $HH^T = nI$.

Hadamardove matrice

Definicija 2.1

Hadamardova matrica je matrica H reda n sa elementima iz $\{1, -1\}$ za koju je $HH^T = nI$.

Primjer

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hadamardove matrice

Vrijedi:

Ako postoji Hadamardova matrica reda n, tada je:

$$n = 1 \vee n = 2 \vee n \equiv 0 (mod 4).$$

Hadamardove matrice

Vrijedi:

Ako postoji Hadamardova matrica reda n, tada je:

$$n = 1 \vee n = 2 \vee n \equiv 0 (mod 4).$$

Hipoteza o Hadamardovim matricama

Ako je $n \equiv 0(mod 4)$, tada postoji Hadamardova matrica reda n.

Hadamardove matrice

Vrijedi:

Ako postoji Hadamardova matrica reda n, tada je:

$$n = 1 \vee n = 2 \vee n \equiv 0(mod 4).$$

Hipoteza o Hadamardovim matricama

Ako je $n \equiv 0(mod 4)$, tada postoji Hadamardova matrica reda n.

- 2005. Kharaghani i Tayfeh-Rezaie riješili slučaj za $n = 428$

Hadamardove matrice

Vrijedi:

Ako postoji Hadamardova matrica reda n, tada je:

$$n = 1 \vee n = 2 \vee n \equiv 0 (mod 4).$$

Hipoteza o Hadamardovim matricama

Ako je $n \equiv 0 (mod 4)$, tada postoji Hadamardova matrica reda n.

- 2005. Kharaghani i Tayfeh-Rezaie riješili slučaj za $n = 428$
- prvi neriješeni slučaj sada je $n = 668$

BGW matrice

BALANSIRANE GENERALIZIRANE TEŽINSKE MATRICE

- matrice nad grupama koje poopćavaju i matrice incidencije simetričnih dizajna i Hadamardove matrice

BGW matrice

Definicija 3.1

Neka je G multiplikativna konačna grupa. Matrica $W = [\omega_{ij}]$ reda v s elementima iz $G \cup \{0\}$ se naziva balansirana generalizirana težinska matrica sa parametrima (v, k, λ) nad G (ili $BGW(v, k, \lambda)$) ako:

i) svaki red od W sadrži točno k ne-nul elemenata,

ii) za svaka 2 različita $i, h \in \{1, 2, ..., v\}$, multiskup

$$\{\omega_{hj}^{-1}\omega_{ij} : 1 \leq j \leq v, \omega_{ij} \neq 0, \omega_{hj} \neq 0\}$$

sadrži točno $\lambda/|G|$ kopija svakog elementa iz G.

BGW matrice

Primjer

Neka je $G = \langle \sigma \rangle$ ciklička grupa reda 3. Tada je:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \sigma & \sigma^2 \\ 1 & 1 & 0 & \sigma^2 & \sigma \\ 1 & \sigma & \sigma^2 & 0 & 1 \\ 1 & \sigma^2 & \sigma & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad BGW(5,4,3;G).$$

Definicija 3.2

Neka je $W = [\omega_{ij}]$ matrica $BGW(v, k, \lambda; G)$. W je normalizirana ako je $\omega_{1j} = \omega_{j1}$, za $j = v - k + 1, v - k + 2, ..., v$.

Definicija 3.2

Neka je $W = [\omega_{ij}]$ matrica $BGW(v, k, \lambda; G)$. W je normalizirana ako je $\omega_{1j} = \omega_{j1}$, za $j = v - k + 1, v - k + 2, ..., v$.

Napomena

Ako sve ne-nul elemente matrice $BGW(v, k, \lambda; G)$ zamijenimo sa 1 dobivamo matricu incidencije simetričnog (v, k, λ)-dizajna.

Generalizirane Hadamardove matrice

Napomena

Svaka Hadamardova matrica reda $n \geq 2$ može se promatrati kao matrica $BGW(n, n, n)$ nad grupom reda 2.

Generalizirane Hadamardove matrice

Napomena

Svaka Hadamardova matrica reda $n \geq 2$ može se promatrati kao matrica $BGW(n, n, n)$ nad grupom reda 2.

Definicija 3.3

Generalizirana Hadamardova matrica je matrica $BGW(w, w, w)$ nad konačnom grupom G. Označava se sa $GH(q, s)$, gdje je $q = |G|$ i $s = w/q$.

BGW matrice

Propozicija 3.4

Neka je q potencija prostog broja i G multiplikativna grupa polja $GF(q) = \{a_1, ..., a_q\}$. Neka je matrica $W = [\omega_{ij}]$ s elementima iz $G \cup \{0\}$ reda $q+1$ definirana sa:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} a_{i-1} - a_{j-1}, & \text{za } i \neq 1 \text{ i } j \neq 1 \\ 0, & \text{za } i = j = 1 \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je W normalizirana $BGW(q+1, q, q-1; G)$

Klasični parametri

- neka je q potencija prostog broja, a $m \geq 2$ cijeli broj
- važan niz *BGW* matrica ima parametre:

$$BGW\left(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, q^m, q^m - q^{m-1}\right)$$

Klasični parametri

- neka je q potencija prostog broja, a $m \geq 2$ cijeli broj
- važan niz BGW matrica ima parametre:

$$BGW(\frac{q^{m+1}-1}{q-1}, q^m, q^m - q^{m-1})$$

Teorem 3.5

Neka su G i S konačne grupe, te $|S| = q \geq 2$. Ako postoji $BGW(q+1, q, q-1; G)$ i $GH(S; 1)$, tada za bilo koji pozitivni cijeli broj m postoji $BGW(v, k, \lambda; G)$, gdje je $v = \frac{q^{m+1}-1}{q-1}$, $k = q^m$ i $\lambda = q^m - q^{m-1}$.

Ionin-ova metoda

- Yuri Ionin sistematično istražio simetrične dizajne korištenjem *BGW* matrica

Ionin-ova metoda

- Yuri Ionin sistematično istražio simetrične dizajne korištenjem *BGW* matrica
- opisat ćemo njegovu glavnu konstrukcijsku metodu koju je razvio u nizu radova od 1997-2001 te zatim primijenio za pronalazak **novih beskonačnih familija sim. dizajna**

Ionin-ova metoda

Oznaka $W \otimes M$

Neka je :

- $\mathcal{M}$ skup $m \times n$ matrica,
- G grupa preslikavanja $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$,
- W $BGW(w, l, \mu)$ nad G.

Tada za $M \in \mathcal{M}$ sa $W \otimes M$ označavamo matricu koja se dobije iz W zamjenom svakog ne-nul elementa σ sa $m \times n$ matricom σM i svakog nul elementa sa $m \times n$ nul-matricom.

Ionin-ova metoda

Teorem 4.1

Neka su $v > k > \lambda \geq 0$ cijeli brojevi, $\mathcal{M}$ neprazan skup matrica, G konačna grupa preslikavanja $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, te W matrica $BGW(w, l, \mu; G)$. Ako vrijede uvjeti:

i) $\forall\ X \in \mathcal{M}$ je matrica incidencije sim. (v, k, λ)-dizajna;

ii) $\forall X, Y \in \mathcal{M},\ \sigma \in G \Rightarrow (\sigma X)(\sigma Y)^T = XY^T$;

iii) $\forall X \in \mathcal{M} \Rightarrow \sum_{\sigma \in G} \sigma X = \frac{\lambda l |G|}{k\mu} J$,

Ionin-ova metoda

Teorem 4.1

Neka su $v > k > \lambda \geq 0$ cijeli brojevi, $\mathcal{M}$ neprazan skup matrica, G konačna grupa preslikavanja $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, te W matrica $BGW(w, l, \mu; G)$. Ako vrijede uvjeti:

i) $\forall\, X \in \mathcal{M}$ je matrica incidencije sim. (v, k, λ)-dizajna;

ii) $\forall X, Y \in \mathcal{M},\ \sigma \in G \Rightarrow (\sigma X)(\sigma Y)^T = XY^T$;

iii) $\forall X \in \mathcal{M} \Rightarrow \sum_{\sigma \in G} \sigma X = \frac{\lambda l |G|}{k\mu} J$,

tada je za svaki $X \in \mathcal{M}$, $W \otimes X$ matrica incidencije simetričnog $(vw, kl, \lambda l)$-dizajna.

Ionin-ova metoda

Lema 4.2

Neka su $v > k > \lambda \geq 0$ cijeli brojevi, $\mathcal{M}$ neprazan skup matrica reda v i G konačna grupa bijekcija $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, pri čemu vrijedi:

- **i)** $\mathcal{M}$ sadrži matricu incidencije M sim. (v, k, λ)-dizajna;
- **ii)** $\forall X, Y \in \mathcal{M},\ \sigma \in G \Rightarrow (\sigma X)(\sigma Y)^T = XY^T$;
- **iii)** $\sum_{\sigma \in G} \sigma M = \frac{k|G|}{v} J$;
- **iv)** $q = k^2/(k - \lambda)$ je potencija prostog broja;
- **v)** G je ciklička i $|G|$ dijeli $q - 1$.

Ionin-ova metoda

Lema 4.2

Neka su $v > k > \lambda \geq 0$ cijeli brojevi, $\mathcal{M}$ neprazan skup matrica reda v i G konačna grupa bijekcija $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, pri čemu vrijedi:

- **i)** $\mathcal{M}$ sadrži matricu incidencije M sim. (v, k, λ)-dizajna;
- **ii)** $\forall X, Y \in \mathcal{M},\ \sigma \in G \Rightarrow (\sigma X)(\sigma Y)^T = XY^T$;
- **iii)** $\sum_{\sigma \in G} \sigma M = \frac{k|G|}{v} J$;
- **iv)** $q = k^2/(k - \lambda)$ je potencija prostog broja;
- **v)** G je ciklička i $|G|$ dijeli $q - 1$.

Tada za svaki poz. cijeli broj m postoji simetrični $(vw, kq^m, \lambda q^m)$-dizajn, gdje je $w = (q^{m+1} - 1)/(q - 1)$.

Grupa simetrija

Definicija 4.3

Neka je $\mathcal{M}$ skup matrica veličine $v \times b$ s elementima iz $\{0, 1\}$, koje imaju konstantnu i jednaku sumu retka r. Neka je S konačna grupa bijekcija $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Kažemo da je S grupa simetrija na $\mathcal{M}$ ako :

- **i)** $(\sigma X)(\sigma Y)^T = XY^T, \ \forall \ X, Y \in \mathcal{M}, \forall \ \sigma \in S$;
- **ii)** $(\exists a \in \mathbb{Z}) \ \sum_{\sigma \in S} \sigma X = aJ, \ \forall \ X \in \mathcal{M}$.

Grupa simetrija

Primjer

Neka je $\mathcal{M}$ skup matrica veličine $v \times b$ s elementima iz $\{0, 1\}$, koje imaju konstantnu i jednaku sumu retka r.

Za $X \in \mathcal{M}$ neka ρX označava matricu dobivenu iz X cikličkom permutacijom $(12...b)$ stupaca od X.

Tada je ciklička grupa S generirana sa ρ grupa simetrija na $\mathcal{M}$

Ionin-ova metoda

Teorem 4.4

Neka je $\mathcal{M}$ skup $v \times b$ matrica incidencije (v, b, r, k, λ)-dizajna, S konačna grupa simetrija na $\mathcal{M}$ i W matrica $BGW(w, l, \mu)$ nad S, gdje je $kr\mu = v\lambda l$. Tada za svaki $X \in \mathcal{M} \Rightarrow W \otimes X$ je matrica incidencije $(vw, bw, rl, kl, \lambda l)$ dizajna.

Dekompozicije simetričnih dizajna

Globalna dekompozicija

Matrica incidencije sim. dizajna dobiva se kao blok matrica u kojoj je svaki blok:

- nul-matrica ili matrica incidencije manjeg sim. dizajna.

Dekompozicije simetričnih dizajna

Globalna dekompozicija

Matrica incidencije sim. dizajna dobiva se kao blok matrica u kojoj je svaki blok:

- nul-matrica ili matrica incidencije manjeg sim. dizajna.

Lokalna dekompozicija

Matrica incidencije rezidualnog/izvedenog dizajna sim. dizajna dobiva se kao blok matrica u kojoj je svaki blok:

- nul-matrica ili matrica incidencije manjeg rezidualnog/izvedenog dizajna.

Globalna dekompozicija

Definicija 5.1.

Neka je $1 < v_1 < v$. $2-(v_1, k_1, \lambda_1)$ dizajn $D_1 = (X_1, \mathcal{B}_1)$ je pravi poddizajn od $2-(v, k, \lambda)$ dizajna $D = (X, \mathcal{B})$ akko:

- **i)** $X_1 \subset X$,
- **ii)** $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$,
- **iii)** $|B \cap X_1| = k_1, \ \forall \ B \in \mathcal{B}_1$,
- **iv)** svake 2 različite točke $x, y \in X_1$ nalaze se u točno λ_1 blokova iz $\mathcal{B}_1$.

Globalna dekompozicija

Definicija 5.2.

Familija pravih simetričnih poddizajna D_i ($i = 1, 2, ..., s$) simetričnog dizajna D se naziva globalna dekompozicija od D ako skupovi incidentnih parova (*flagova*) dizajna D_i čine particiju skupa incidentnih parova od D.

Globalna dekompozicija

Definicija 5.2.

Familija pravih simetričnih poddizajna D_i $(i = 1, 2, ..., s)$ simetričnog dizajna D se naziva globalna dekompozicija od D ako skupovi incidentnih parova (*flagova*) dizajna D_i čine particiju skupa incidentnih parova od D.

$\Rightarrow$ Sim. dizajn se može globalno dekomponirati ako se njegova matrica incidencije može razdvojiti u nepreklapajuće matrice koje su ili nul-matrice ili matrice incidencije manjih sim. dizajna

Regularna uniformna globalna dekompozicija

Definicija 5.3.

Neka je familija sim. dizajna $\{D_i\}$ **globalna dekompozicija** sim. dizajna D. Dekompozicija je

a) uniformna ako svi dizajni D_i imaju istu veličinu blokova;

b) regularna ako je za $\forall$ 2 dizajna $D_i = (X_i, \mathcal{B}_i)$ i $D_j = (X_j, \mathcal{B}_j)$: $X_i = X_j \vee X_i \cap X_j = \emptyset$ i $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_j \vee \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$.

Regularna uniformna globalna dekompozicija

Definicija 5.3.

Neka je familija sim. dizajna $\{D_i\}$ **globalna dekompozicija** sim. dizajna D. Dekompozicija je

a) uniformna ako svi dizajni D_i imaju istu veličinu blokova;

b) regularna ako je za $\forall$ 2 dizajna $D_i = (X_i, \mathcal{B}_i)$ i $D_j = (X_j, \mathcal{B}_j)$: $X_i = X_j \vee X_i \cap X_j = \emptyset$ i $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_j \vee \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$.

$\Rightarrow$ Matrica $W \otimes X$ dobivena konstrukcijom iz Teorema 4.4. je matrica incidencije simetričnog $(vw, kl, \lambda l)$-dizajna koja dopušta regularnu uniformnu globalnu dekompoziciju na simetrične (v, k, λ)-dizajne.

Regularna uniformna globalna dekompozicija

Teorem 5.4

Neka je D simetričan dizajn koji koji dopušta regularnu uniformnu globalnu dekompoziciju na simetrične (v, k, λ)-dizajne. Neka je M matrica incidencije od D, gdje je svaki blok M_{ij} $(i, j = 1, ..., w)$ od M ili nul-matrica reda v ili matrica incidencije simetričnog (v, k, λ)-dizajna. Pretpostavimo da postoji linearno nezavisan skup $\mathcal{M}$ matrica incidencije simetričnih (v, k, λ)-dizajna koji sadrži sve ne-nul matrice M_{ij} i dopušta strogo tranzitivnu grupu simetrija S.

Tada postoji $X \in \mathcal{M}$ i BGW matrica W nad S s parametrima (w, l, μ) takve da je: $k^2\mu = v\lambda l$ i $W \otimes X = M$.

Regularna uniformna globalna dekompozicija

Ionin je dobio sljedeće beskonačne familije sim. dizajna koje dopuštaju regularnu uniformnu globalnu dekompoziciju:

Regularna uniformna globalna dekompozicija

Ionin je dobio sljedeće beskonačne familije sim. dizajna koje dopuštaju regularnu uniformnu globalnu dekompoziciju:

- $\left(\frac{p^{d+1}(q^{2m}-1)}{q-1}, q^{2m-1}p^d, (q-1)q^{2m-2}p^{d-1}\right)$,
  $m, d \in \mathbb{N}$, p i $q = \frac{p^{d+1}-1}{p-1}$ prim potencije;
- $\left(\frac{p^d(q^{2m}-1)}{(p-1)(p^d+1)}, p^d q^{2m-1}, p^d(p^d+1)(p-1)q^{2m-2}\right)$,
  $m, d \in \mathbb{N}$, p i $q = p^{d+1} + p - 1$ prim potencije;
- $\left(\frac{2\cdot 3^d(q^{2m}-1)}{3^d+1)}, 3^d q^{2m-1}, \frac{3^d(3^d+1)q^{2m-2})}{2}\right.$,
  $d \in \mathbb{N}$, $q = \frac{3^{d+1}+1}{2}$ prim potencija;

Regularna uniformna globalna dekompozicija

- $\left(\frac{3^d(q^{2m}-1)}{2(3^d-1)}, 3^d q^{2m-1}, 2\cdot 3^d(3^d-1)q^{2m-2}\right)$,
  $d \in \mathbb{N}$, $q = 3^{d+1} - 2$ prim potencija;
- $\left(\frac{2^{2d+3}(q^{2m}-1)}{q+1}, 2^{2d+1} q^{2m-1}, 2^{2d-1}(q+1)q^{2m-2}\right)$,
  $d \in \mathbb{N}$, $q = \frac{2^{2d+3}+1}{3}$ prim potencija;
- $\left(\frac{2^{2d+3}(q^{2m}-1)}{3(q-1)}, 2^{2d+1} q^{2m-1}, 3\cdot 2^{2d-1}(q-1)q^{2m-2}\right)$,
  $d \in \mathbb{N}$, $q = 2^{2d+3} - 3$ prim potencija;