# Flag-tranzitivni linearni prostori

Andrea Švob
(asvob@math.uniri.hr)

5. studenoga 2010.

# Djelovanja grupe na skup

## Definicija

*Grupa $G$* **djeluje** *na konačan skup $\Omega$ ako postoji preslikavanje $f : G \times \Omega \to \Omega$ takvo da vrijedi*

1. $f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \ \forall x \in \Omega, \ \forall g_1, \ g_2 \in G,$
2. $f(1, x) = x, \ \forall x \in \Omega.$

*Slika djelovanja elementa $g \in G$ na element $x \in \Omega$ označava se $g.x$ ili $x^g$.*

## Definicija

*Skup $G_x = \{g \in G \mid g.x = x\} \leq G$ naziva se* **stabilizator** *elementa $x$ za djelovanje grupe $G$.*

Na skupu $\Omega$ na kojeg djeluje grupa $G$ može se definirati relacija

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists g \in G) \text{t.d.je} g.x = y.$$

Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu $\Omega$.

Klasa ekvivalencije elementa $x$ s obzirom na relaciju $\sim$,
$G.x = \{g.x \mid g \in G\}$, naziva se **orbita** elementa $x$ za djelovanje grupe $G$.
Dugi način zapisa: $x^G = \{x^g, g \in G\}$

## Teorem

*Neka grupa $G$ djeluje na skupu $\Omega$ i neka su $x, y \in G$ i $\alpha, \beta \in \Omega$. Tada vrijedi:*

- (i) *Orbite $\alpha^G$ i $\beta^G$ su ili jednake ili disjunktne. Skup svih orbita grupe $G$ čini particiju od $\Omega$ na međusobno disjunkte skupove.*
- (ii) *Stabilizator $G_\alpha$ je podgrupa od $G$ i vrijedi da je $G_\beta = x^{-1} G_\alpha x$, za svaki $\beta = \alpha^x$. Također, vrijedi, $\alpha^x = \beta^y \iff G_\alpha x = G_\beta y$.*
- (iii) *$|\alpha^G| = |G : G_\alpha|$, za svaki $\alpha \in G$. Posebno, ako je grupa $G$ konačna tada vrijedi: $|\alpha^G||G_\alpha| = |G|$.*

### Definicija

*Grupa $G$ djeluje* **tranzitivno** *na skup $\Omega$ ako postoji element $x \in \Omega$ takav da je $G.x = \Omega$. Odnosno, cijeli skup $\Omega$ je jedna orbita. Grupa $G$ je tranzitivna ako za svaki par točaka $\alpha, \beta \in \Omega$ postoji $g \in G$ takav da je $\alpha^g = \beta$.*

### Definicija

*Grupa $G$ djeluje* **regularno** *na skupu $\Omega$, ako djeluje tranzitivno i ako je $G_\alpha = 1$ za svaki $\alpha \in \Omega$.*

**Korolar**

*Neka grupa $G$ djeluje tranzitivno na skupu $\Omega$. Tada vrijedi:*

(i) *Stabilizatori $G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ čine jedinstvenu klasu konjugiranosti podgrupa od $G$.*

(ii) $|G : G_\alpha| = |\Omega|$, *za svaki* $\alpha \in \Omega$

(iii) *Ako je grupa $G$ konačna, tada djeluje regularno na skup $\Omega$ ako i samo ako vrijedi $|G| = |\Omega|$.*

Neka grupa $G$ djeluje na skup $X$. Proširimo to djelovanje na skup podskupova skupa $\Omega$ na sljedeći način:

$$g.X = \{g.x \mid x \in X\}, \ X \subseteq \Omega.$$

### Definicija

*Neka grupa $G$ djeluje tranzitivno na skup $\Omega$ i neka je $\Delta \subseteq \Omega$. Ako za svaki $g \in G$ vrijedi $g.\Delta = \Delta$ ili $g.\Delta \cap \Delta = \emptyset$, onda se skup $\Delta$ naziva* **blok**.

Trivijalni blokovi:

- $\Omega$,
- $\{x\}$, za svaki $x \in \Omega$.

### Definicija

*Ako grupa $G$ djeluje tranzitivno na skup $\Omega$ tako da ne postoje netrivijalni blokovi, onda kažemo da je djelovanje* **primitivno** *i da je $G$* **primitivna grupa**.

### Teorem

*Neka grupa $G$ djeluje tranzitivno na skup $\Omega$. To djelovanje je primitivno ako i samo ako je $G_x$ maksimalna podgrupa grupe $G$ za svaki $x \in \Omega$.*

### Definicija

*Grupa $G$ je $k$-**tranzitivna** ako za svake dvije $k$-torke različitih elemenata iz $\Omega$, postoji element $g \in G$ takav da jednu preslikava u drugu tj.*
$(a_1, \ldots, a_k)$ *i* $(b_1, \ldots, b_k) \in \Omega$, $\exists g \in G$ *t.d.* $g.a_i = b_i$, $\forall i = 1, ..., k$.
*Grupa $G$ je **jako tranzitivna** na skupu $\Omega$ ako je $\Omega$ beskonačan i grupa $G$ je $k$-tranzitivna za svaki cijeli broj $k \geq 1$.*

### Definicija

*Grupa $G$ je $k$-**homogena** ako je tranzitivna na skupu $\Omega^{\{k\}}, 1 \leq k \leq |\Omega|$.*
*Grupa $G$ je **jako homogena** (highly) ako je $\Omega$ beskonačan i grupa $G$ je $k$-homogena za svaki cijeli broj $k \geq 1$.*

Očito, ako je grupa $G$ $k$-tranzitivna, ona je i $k$-homogena.

### Definicija

*Grupa $G$ je* **strogo** $k$-**tranzitivna** *ako je element $g$ (iz definicije tranzitivnosti) jedinstven. Odnosno, ako grupa $G$ djeluje regularno na skupu $\Omega^{(k)}$.*

### Definicija

*Označimo sa $S(\Omega)$ skup svih bijekcija na skupu $\Omega$. Skup $S$ s obzirom na kompoziciju preslikavanja tvori grupu. Za konačan skup $\Omega$, bijekcije na skupu $\Omega$ se nazivaju* **permutacije** *skupa $\Omega$.*

### Definicija

*Grupa svih permutacija skupa $\Omega$ zove se* **simetrična grupa** *i označava $S_n$, $n = |\Omega|$.Podgrupa grupe $S_n$ naziva se* **permutacijska grupa**.

Broj svih permutacija skupa $\Omega$: $|S_n| = n!$

### Korolar (Cayleyev teorem)

*Svaka konačna grupa je izomorfna nekoj permutacijskoj grupi.*

# Teorem - O'Nan-Scott

**Teorem (O'Nan-Scott)**

*Svaka konačna primitivna permutacijska grupa pripada jednoj od sljedećih klasa: afina, kartezijeva, skoro jednostavna, biregularna ili dijagonalna.*

### G je afinog tipa

Pretpostavimo da skup $\Omega$ ima strukturu afinog prostora $AG(n,p)$, gdje je $p$ prost broj. Za grupu $G$ kažemo da je afinog tipa ako primitivno djelovanje grupe $G$ na skupu $\Omega$, strukturu ostavlja invarijantnom ili ako je grupa $G$ oblika $G = TG_0$, gdje je $T$ grupa translacija od $AG(n,p)$ i $G_0 \leq GL(n,p)$.

$GL(n,p)$ je opća linearna grupa.

## G je kartezijevog tipa

Neka je $\Omega = A_1 \times \ldots \times A_n$ kartezijev produkt od $n \geq 2$ kopija nekog skupa $A$ reda $a \geq 2$. Neka je dan indeks $j \in \{1, \ldots, n\}$ i za svaki $i \neq j$ element $a_i \in A$. Skup svih točaka $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ takvih da je $x_i = a_i$ za svaki $i \neq j$ zove se kartezijev pravac $j$-te paralelne klase. Skup $\Omega$ zadan sa svim kartezijevim pravcima zove se kartezijev prostor $A^n$. Grupa $G$ je kartezijevog tipa ako $G$ ostavlja strukturu nekog kartezijevog prostora $A^n$ na $\Omega$ invarijantnom. Budući da $G$ djeluje primitivno na $\Omega$ stabilizator $G_x$ bilo koje točke $x \in \Omega$ djeluje tranzitivno na $n$ kartezijevih pravaca kroz $x$.

### Grupa $G$ je skoro jednostavnog tipa

Grupa $G$ je skoro jednostavnog tipa ako $G$ sadrži neabelovu jednostavnu normalnu podgrupu $N$ takvu da vrijedi $N \triangleleft G \leq AutN$

### Grupa $G$ je biregularnog tipa

Pretpostavimo da grupa $G$ normalizira direktni produkt $N = \Sigma_1 \times ... \times \Sigma_n$ od $n$ kopija neabelove jednostavne grupe $\Sigma$. Ako je $n = 2$ i ako obje podgrupe $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ djeluju regularno na $\Omega$, kažemo da je $G$ biregularnog tipa.

### Grupa $G$ je dijagonalnog tipa

Ako je $n \geq 3$ i ako je stabilizator $N_x$ točke $x \in \Omega$ dijagonalna podgrupa od $N$ izomorfna s $\Sigma$, tada je $G$ dijagonalnog tipa.

# Incidencijske strukture

### Definicija

**Incidencijska struktura** $\mathcal{D}$ *je uređena trojka* $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$, *gdje su* $\mathcal{P}$ *i* $\mathcal{B}$ *neprazni disjunktni skupovi i* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$. *Elementi skupa* $\mathcal{P}$ *se nazivaju* **točke**, *elementi skupa* $\mathcal{B}$ **blokovi**, *a relacija* $\mathcal{I}$ **relacija incidencije**.

Broj blokova koji su incidentni s točkom $P$ naziva se **stupanj točke** $P$ i broj točaka koje su incidentne s blokom $x$ naziva se **stupanj bloka** $x$.
Za incidencijsku strukturu u kojoj je svaka od $v$ točaka stupnja $r$ i svaki od $b$ blokova stupnja $k$ vrijedi $vr = bk$.

# Dizajni

### Definicija

*Konačna incidencijska struktura* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ *je* $t - (v, k, \lambda)$ **dizajn** *ako vrijedi sljedeće:*

1. $|\mathcal{P}| = v$,
2. *svaki element skupa* $\mathcal{B}$ *incidentan je s točno* $k$ *elemenata skupa* $\mathcal{P}$,
3. *svakih* $t$ *elemenata skupa* $\mathcal{P}$ *incidentno je s točno* $\lambda$ *elemenata skupa* $\mathcal{B}$.

### Definicija

$2 - (v, k, \lambda)$ *dizajn naziva se blok dizajn.*

## Definicija

*Neka su* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ *i* $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', \mathcal{I}')$ *incidencijske strukture. Bijektivno preslikavanje* $f : \mathcal{P} \times \mathcal{B} \to \mathcal{P}' \times \mathcal{B}'$ *je* **izomorfizam** *iz* $\mathcal{D}$ *na* $\mathcal{D}'$ *ako vrijedi:*

1. $f$ *preslikava* $\mathcal{P}$ *na* $\mathcal{P}'$ *i* $\mathcal{B}$ *na* $\mathcal{B}'$
2. $(P, x) \in \mathcal{I} \Rightarrow (f(P), f(x)) \in \mathcal{I}', \ \forall P \in \mathcal{P}$ *i* $\forall x \in \mathcal{B}$

*Ako je* $\mathcal{D}' = \mathcal{D}$, *onda se preslikavanje* $f$ *naziva* **automorfizam**. *Skup svih automorfizama je grupa s obzirom na kompoziciju funkcija i naziva se* **puna grupa automorfizama** *strukture* $\mathcal{D}$.

# Linearni prostori

**Definicija**

*Linearni prostor $S$ je incidencijska struktura koja se sastoji od skupa točaka, $\Omega$, i skupa pravaca $\Lambda$, takvih da su svake dvije točke incidentne s točno jednim pravcem,(u oznaci $xy$), svaka točka je incidentna s najmanje dva pravca i svaki pravac je incidentan s najmanje dvije točke. Flag od $S$ je par $(p, L)$, gdje je $p$ točka incidentna s pravcem $L$.*

Vrijedi:

- $|\Omega| = v$,
- $|\Lambda| = b$,
- $\lambda = 1$,
- $k$ - broj točaka na svakom pravcu, $k \geq 2$,
- $r$ - broj pravaca kroz svaku točku, $r \geq 2$,
- $vr = bk$ daje broj *"flags"* skupa $S$.

### Definicija

*Flag-tranzitivan linearan prostor je par $(S, G)$, gdje je $S$ netrivijalan konačan linearan prostor i $G$ grupa automorfizama od $S$ koja djeluje tranzitivno na $(p, L)-$ "flags" od $S$.*

**Teorem**

*Uz gornje oznake, vrijedi:*

(i) $bk = vr$;

(ii) $b = v(v-1)/k(k-1) \geq v$;

(iii) *Fischerova nejednakost:* $v \leq b$ *i* $k \leq r$.

(iv) $v \geq k^2 - k + 1$

(v) $r > \sqrt{v}$

Neka je $G \leq AutS$ grupa automorfizama linearnog prostora $S$. Zanimaju nas sljedeća djelovanja:

- Tranzitivno na točkama/pravcima - Grupa $G$ djeluje tranzitivno na točkama/pravcima skupa $S$
- Primitivno na točkama/pravcima - Grupa $G$ djeluje primitivno na točkama/pravcima skupa $S$
- **Flag-tranzitivno** - Grupa $G$ djeluje tranzitivno na "flags" skupa $S$
- 2-tranzitivno na točkama/pravcima- Grupa $G$ djeluje tranzitivno na uređenom paru točaka/pravaca skupa $S$

Zieschang, Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Camina, Gagen, Kantor, Key, Saxl, Liebeck,...

$$\begin{tikzcd}
(2L)T \arrow[r] \arrow[d] & LPr \arrow[r] & LT \arrow[r] & PT \\
(2P)T \arrow[rr] & & FT \arrow[u] \arrow[r] & PPr \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

### Teorem (Higman, McLaughlin)

*Neka je $G$ flag-tranzitivna grupa. Tada je grupa $G$ primitivna na skupu točaka skupa $S$. Odnosno, stabilizator $G_x$ svake točke $x$ skupa $S$ je maksimalna podgrupa od $G$ indeksa $v$.*

Neki zanimljivi rezultati:

### Klasifikacija

Za bilo koju flag-tranzitivnu grupu $G$ vrijedi:

(i) $G$ je skoro jednostavna,

(ii) $G$ je afina grupa.

Neki primjeri flag-tranzitivnih linearnih prostora:

### Desarquesovi projektivni prostori

$S = PG(d, q)$ je projektivni prostor dimenzije $d \geq 2$ nad poljem $F_q$. Svaka grupa $G$ takva da je $PSL(d+1, q) \leq G \leq P\Gamma L(d+1, q)$ djeluje flag-tranzitivno na $S$.

### Hermitski unitali

Neka je $V$ 3-dimenzionalan vektorski prostor nad $F_{q^2}$ sa nedegeneriranom hermitskom formom. Hermitski unital $U_H(q)$ ima $q^3 + 1$ točku, koje leže u 1-dimenzionalnim prostorima u $V$. Pravce unitala čini skup od $q + 1$ točaka koje leže u nedegeneriranom 2-dimenzionalnom prostoru. Svaka grupa $G$ takva da je $PSU(3, q) \leq G \leq P\Gamma U(3, q)$ djeluje flag-tranzitivno na $U_H(q)$.

### Ree-ovi unitali

Za svaki cijeli broj $e \geq 0$ i $q = 3^{2e+1}$, postoji Ree-ova grupa ${}^2G_2(q)$ sa 2-tranzitivnim djelovanjem na $q^3 + 1$ točaka. Svaki par točaka je fiksiran s jedinstvenom involucijom. Skup takvih točaka ima $q + 1$ elemenata koje zovemo pravci. Dobiveni linearni prostor zove se Ree-ov unital, u oznaci $U_R(q)$. Svaka grupa $G$ za koju vrijedi ${}^2G_2(q) \leq G \leq Aut({}^2G_2(q))$ djeluje flag-tranzitivno na $U_R(q)$.

### Witt-Bose-Shrikhande-ovi prostori

Neka je $q = 2^n, n \geq 3$. Witt-Bose-Shrikhande-ovi prostori $W(q)$ definirani su iz grupe $PSL(2, q)$ na sljedeći način: točke su podgrupe od $PSL(2, q)$ koja je izomorfna diedralnoj grupi reda $2(q + 1)$. Pravci su involucije od $PSL(2, q)$, a točka je incidentna s pravcem ako i samo ako podgrupa sadrži involuciju. Svaka grupa $G$ za koju vrijedi $PSL(2, q) \leq G \leq P\Gamma L(2, q)$ djeluje flag-tranzitivno na $W(q.)$.

1. Desarquesovi afini prostori
2. Nedesarquesove translacijske afine ravnine
3. Heringovi prostori

### Teorem

*Svaka grupa automorfizama Steinerovog sustava $S(2,k,v)$, koja je tranzitivna na skupu pravaca, gdje $k$ dijeli $v$, je flag-tranzitivna.*

### Teorem

*Neka je $D$ $S_\lambda(t,k,v)$, gdje je $t \geq 3$ i neka je $G$ flag-tranzitivna grupa automorfizama od $D$. Tada $G$ djeluje 2-tranzitivno na točkama od $D$.*

### Teorem

*Svaka flag-tranzitivna grupa automorfizama Steinerovog sustava $S(2,k,v)$, je primitivna na točkama.*

**Teorem**

*Za svaki pozitivni cijeli broj $\lambda$ postoji konačno mnogo dizajna $S_\lambda(2,k,v)$ sa flag-tranzitivnom grupom automorfizama koja je neprimitivna na točkama.*

**Teorem**

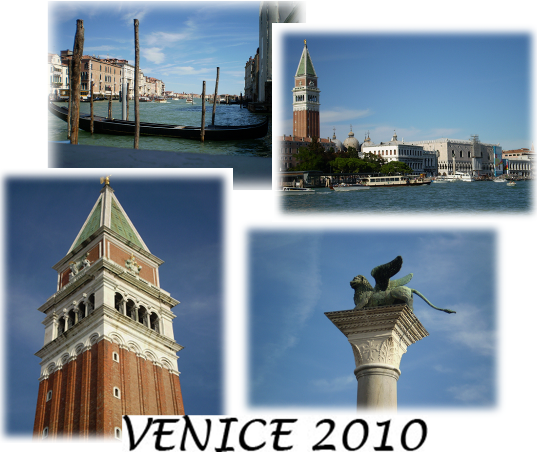
*Neka je $D = S_\lambda(t,k,v)$ sa $v > [\binom{k}{2} - 1]^2$. Tada svaka blok tranzitivna grupa automorfizmama $G$ od $D$ je nužno primitivna na točkama.*

**Teorem**

*Neka je $D$ tranzitivan na pravcima, ali neprimitivan na točkama Steinerov sustav $S(2,k,v)$sa $v = [\binom{k}{2} - 1]^2$. Tada je $D$ dizajn s parametrima $S(2,8,729)$.*

**Teorem**

*Neka je $D$ netrivijalan t-dizajn. Ako je $D$ tranzitivan na pravcima (blokovima), tada je $t \leq 7$ i ako je $D$ flag tranzitivan, onda je $t \leq 6$.*


VENICE 2010

J.D.Dixon, B. Mortimer, Permutation Groups, Springer, 1996.

P.Cameron, Permutation Groups, Cambridge University Press, 1999.