Uvod u balansirane nepotpune blok dizajne

Marija Maksimović
mmaksimovic@math.uniri.hr

- **D. R. Stinson**: Combinatorial Designs with Selected Applications Lecture Notes

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Sadržaj

Definicija 1.1

Neka su v,k i λ pozitivni cijeli brojevi takvi da $v > k \geq 2$.
(v,k,λ)-balansiran nepotpun blok dizajn (**(v,k,λ)-BIBD**) je uređen par $(X, \mathcal{A})$ takav da su zadovoljena sljedeća svojstva:

Definicija 1.1

Neka su v,k i λ pozitivni cijeli brojevi takvi da $v > k \geq 2$.
(v,k,λ)-balansiran nepotpun blok dizajn (**(v,k,λ)-BIBD**) je uređen par $(X, \mathcal{A})$ takav da su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. X je skup od v elemenata koje nazivamo točke

Definicija 1.1

Neka su v,k i λ pozitivni cijeli brojevi takvi da $v > k \geq 2$.
(v,k,λ)-balansiran nepotpun blok dizajn (**(v,k,λ)-BIBD**) je uređen par $(X, \mathcal{A})$ takav da su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. X je skup od v elemenata koje nazivamo točke
2. $\mathcal{A}$ je familija podskupova od X koje nazivamo blokovi

Definicija 1.1

Neka su v,k i λ pozitivni cijeli brojevi takvi da $v > k \geq 2$.
(v,k,λ)-balansiran nepotpun blok dizajn (**(v,k,λ)-BIBD**) je uređen par $(X, \mathcal{A})$ takav da su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. X je skup od v elemenata koje nazivamo točke
2. $\mathcal{A}$ je familija podskupova od X koje nazivamo blokovi
3. svaki blok sadrži točno k točaka i

Definicija 1.1

Neka su v,k i λ pozitivni cijeli brojevi takvi da $v > k \geq 2$.
(v,k,λ)-balansiran nepotpun blok dizajn (**(v,k,λ)-BIBD**) je uređen par $(X, \mathcal{A})$ takav da su zadovoljena sljedeća svojstva:

1. X je skup od v elemenata koje nazivamo točke
2. $\mathcal{A}$ je familija podskupova od X koje nazivamo blokovi
3. svaki blok sadrži točno k točaka i
4. svaki par različitih točaka je sadržan u točno λ blokova

Primjer 1.1

(9,3,1)-BIBD.

$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\mathcal{A}=\{123,456,789,147,258,369,159,267,348,168,249,357\}$

Primjer 1.2

(10,4,2)-BIBD.

$X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$\mathcal{A}=\{0123,0145,0246,0378,0579,0689,1278,1369,1479,1568,2359,2489,$
$2567,3458,3467\}.$

Primjer 1.3

Neka $\mathcal{A}$ sadrži sve podskupove od X ($|X| = v$) veličine k. Tada je $(X, \mathcal{A})$ $(v, k, \binom{v-2}{k-2})$-BIBD.

Teorem 1.1

U (v,k,λ)-BIBD-u svaka točka se pojavljuje u točno

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

blokova.

Teorem 1.2

(v,k,λ)-BIBD ima točno

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2 - v)}{(k^2 - k)}$$

blokova.

- Umjesto zapisa (v,k,λ)-BIBD nekada se koristi i (v,b,r,k,λ)-BIBD.
- Vidimo da su b i r su cijeli brojevi pa pomoću predhodna dva teorema možemo zaključiti postoji li BIBD sa određenim parametrima.
- (8, 3, 1)-BIBD ne postoji jer pomoću Teorema 1.1 dolazimo do toga da je r=7/2.
- (19, 4, 1)-BIBD ne postoji jer iako je r=6 (Teorem 1.1) pomoću Teorema 1.2 dolazimo do toga da je $b = 19 \times 6/4$.

Definicija 1.2

Neka je $(X, \mathcal{A})$ (v, k, λ)-BIBD gdje je $X=\{x_1, \ldots, x_v\}$ i $\mathcal{A}=\{A_1, \ldots, A_b\}$. Incidentna matrica od $(X, \mathcal{A})$ je matrica $M = (m_{i,j})$ definirana sa

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ako } x_i \in A_j \\ 0 & \text{ako } x_i \notin A_j \end{cases}$$

Primjer 1.4

(9,3,1)-BIBD.
X={1,2,3,4,5,6,7,8,9} i
$\mathcal{A}$={123,456,789,147,258,369,159,267,348,168,249,357}
Incidentna matrica tog BIBD-a je:

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

Neka je:
I_n-jedinična matrica reda n
J_n- kvadratna matrica reda n u kojoj je svaki element 1
u_n-vektor duljine n kojem je svaka komponenta jednaka 1

Teorem 1.3

Neka je M 0 - 1 matrica reda (v, b). Tada je M incidentna matrica od (v,b,r,k,λ)-BIBD-a ako i samo ako $MM^T = \lambda J_v + (r-\lambda)I_v$ i $u_v M = k u_b$.

Definicija 1.3

Pretpostavimo da su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ dva (v, k, λ)-BIBD-a. Kažemo da su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izomorfni ako postoji bijekcija $\alpha\colon X \to Y$ takva da je

$$\{\{\alpha(x)\colon x \in A\}\colon A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{B}.$$

Primjer 1.5

Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ dva $(7, 3, 1)$-BIBD-a:
$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $\mathcal{A} = \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}$.
$Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ i $\mathcal{B} = \{abd, bce, cdf, deg, aef, bfg, acg\}$.
Definirajmo bijekciju α kao:
$\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$, $\alpha(3) = d$, $\alpha(4) = c$, $\alpha(5) = g$, $\alpha(6) = e$, $\alpha(7) = f$.
Kad točke preslikamo pomoću α blokovi od $\mathcal{A}$ postaju:

$$\begin{aligned}
123 &\rightarrow abd\\
145 &\rightarrow acg\\
167 &\rightarrow aef\\
246 &\rightarrow bce\\
257 &\rightarrow bfg\\
347 &\rightarrow cdf\\
356 &\rightarrow deg
\end{aligned}$$

Vidimo da je α izomorfizam ta dva BIBD-a.

Definicija 1.4

Neka je $(X, \mathcal{A})$ (v, k, λ)-BIBD. Automorfizam od $(X, \mathcal{A})$ je izomorfizam tog istog na samoga sebe odnosno vrijedi

$$\{\{\alpha(x) \colon x \in A\} \colon A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}.$$

Skup svih automorfizama BIBD-a $(X, \mathcal{A})$ je grupa, a označava se $\mathrm{Aut}(X, \mathcal{A})$.

Teorem 1.4

Neka su $M = (m_{i,j})$ i $N = (n_{i,j})$ incidentne matrice dva (v, b, r, k, λ)-BIBD-a. Tada su ta dva BIBD-a izomorfna ako i samo ako postoje permutacije γ, skupa $\{1, \ldots, v\}$, i β, skupa $\{1, \ldots, b\}$, takve da vrijedi

$$m_{i,j} = n_{\gamma(i),\beta(j)}$$

za sve $1 \leq i \leq v, \quad 1 \leq j \leq b$.

Teorem 1.5 ("konstrukcija zbroja")

Pretpostavimo da postoji (v, k, λ_1)-BIBD i (v, k, λ_2)-BIBD. Tada postoji i $(v, k, \lambda_1 + \lambda_2)$-BIBD.

- Ako postoji (v, k, λ)-BIBD onda postoji $(v, k, 2\lambda)$-BIBD.

Teorem 1.6 ("konstrukcija komplementa")

Ako postoji (v, b, r, k, λ)-BIBD onda postoji $(v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$-BIBD.

Teorem 1.6 ("konstrukcija komplementa")

Ako postoji (v, b, r, k, λ)-BIBD onda postoji $(v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$-BIBD.

- Komplement (7,3,1) BIBD-a je (7,4,2) BIBD.
- Komplement (9,3,1) BIBD-a je (9,6,5) BIBD.

Teorem 1.7 (Fisherova nejednakost)

U (v, b, r, k, λ)-BIBD-u $b \geq v$.

- Zaključak teorema $b \geq v$ možemo zapisati i ovako: $r \geq k$ ili $\lambda(v-1) \geq k^2 - k$.

Primjer 1.6

U (16,6,1)-BIBD-u imamo $r = 3$ pa imamo slučaj $r < k$.
Zaključujemo da (16,6,1)-BIBD ne postoji.